Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants: L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

TD1 : REVISIONS CALCUL DIFFERENTIEL

Exercice 1. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 des fonctions suivantes, puis calculer le vecteur gradient et la matrice hessienne au point indiqué:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y + y^2x + e^{xy}, \ \text{Point : } (0,1), \\ g(x,y,z) &= \cos(xy) + x^2y^3z^4, \ \text{Point : } (0,1,2). \end{aligned}$$

Exercice 2. Soient m et p deux entiers, et f et g les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \frac{x^m y^p}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0,$$

$$g(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0),\ g(0,0) = 0.$$

Sont-elles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. On considère dans tout cet exercice une fonction f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et que suppose que toutes ses dérivées partielles sont bornées par $M \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M\sqrt{n}||x-y||$$

   où $||.||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

2. On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que f est continue en 0 et que toutes ses fonctions dérivées partielles tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. Montrer que f est différentiable en 0.

3. On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et que toutes ses dérivées partielles sont bornées par $M \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que f est continument prolongeable à $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $n \geq 2$. Dans ce cas, f est-elle nécessairement différentiable en 0?

Exercice 4. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad < df(a)(h), h > \leq -||h||^2$$

où $< .,. >$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $||.||$ la norme associée.

1. Montrer que pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$:

$$||f(x) - f(y)|| \geq ||x - y||$$

2. En déduire que pour tout a et h dans $\mathbb{R}^n$:

$$||df(a)(h)|| \geq ||h||$$

puis que $df(a)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert puis un fermé de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées réelles de taille n. Soit f l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par

$$f(A) = \alpha A^T A + \beta A A^T + \gamma A + \delta A^T, \tag{1}$$

où α, β, γ et δ désignent des constantes réelles. Montrer que f est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.

Exercice 6. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(p) = \int_{-1}^{1} (p(x)^2 + 8p'(x)^3)dx.$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa différentielle.