Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants: L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

TD2 : CONVEXITE

Exercice 1 – On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 0\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ ou } y \geq 0\}$,
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 0,\ y \geq x^3\}$,
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \leq 4,\ 3x + 3y + 1 \geq 0\}$,
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \geq 4,\ 3x + 3y + 1 \geq 0\}$.

Représenter graphiquement chacun de ces ensembles et dire s'il est convexe ou pas.

Exercice 2 – Etudier la convexité ou la concavité de chacune des fonctions

- $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$.
- $f_2(x, y, z) = x \log x + y \log y + z \log z$.
- $f_3(x, y) = x(x + y^2)$.
- $f_4(x, y) = \log(xy)$.

Exercice 3 – En microéconomie, une *fonction de production* exprime la relation entre les volumes des entrants (inputs) d'une entreprise et le volume de sa production (output). Elle s'écrit sous la forme $Q = f(x_1, ..., x_n)$ où Q est la quantité produite et $x_1, ...x_n$ les facteurs de production (travail, capital,...). Elle peut par exemple être de la forme $Q = a_1x_1 + ... + a_nx_n + c$ ou de la forme $Q = cx_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ (fonction de Cobb-Douglas) ou de la forme $Q = \min(a_1x_1, ..., a_nx_n)$ (fonction de Leontieff).

On se place ici dans le cas d'une fonction de production de la forme $f(x_1, ...x_n) = cx_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ avec $c > 0$, $a_1 > 0, ..., a_n > 0$.

Étudier la concavité et la quasi-concavité de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

Exercice 4 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des constantes strictement positives. Étudier la concavité et la quasi-concavité de la fonction

$$f(x_1, ..., x_n) = \min_{1\leq i\leq n} \frac{x_i}{\alpha_i}.$$

Exercice 5 – Soit A une matrice carrée et symétrique de taille $n \times n$. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

$$f(X) = \frac{1}{2}X^TAX + B^TX + c,$$

pour tout $X = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Ici $B = (b_1, ..., b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ (on convient de représenter les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, qui sont à priori des n-uplets, par leur vecteurs coordonnées qui sont des matrices $n \times 1$).

1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit convexe.
2. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit quasi-convexe.
3. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit strictement convexe.

Exercice 6 –

1. Trouver une fonction strictement convexe de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f''(0) = 0$.
2. Montrer l'inégalité suivante

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \Pi_{i=1}^n x_i^{\lambda_i},$$

pour tous $x_1 > 0, ..., x_n > 0$ et $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Exercice 7 – On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ définie par

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} -(x_1...x_n)^{1/n} & \text{si } x_1 > 0....x_n > 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convexité de f.

Exercice 8 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie doté d'une norme $\|.\|$. Soit A un sous-ensemble fermé non vide de E. Montrer que A est convexe si et seulement si la fonction distance par rapport à A est convexe. On rappelle que cette dernière est définie par

$$\forall \boldsymbol{x} \in E,\ d_A(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{y} \in A} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$