Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants: L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

TD 3 : OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

Exercice 1 – Soit D un disque fermé de $\mathbb{R}^2$, contenant un voisinage de 0. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x,y) = \int\int_D \exp(ux+vy)dudv$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\lim_{||(x,y)||\to+\infty} f(x,y) = +\infty$$

2. Montrer que f est strictement convexe
3. En déduire que f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 – On cherche à calculer $\mu = \min\limits_{(x,y)\in[-1,1]^2} \varphi(x,y)$ où

$$\forall (x,y) \in [-1,1]^2, \quad \varphi(x,y) = \int_{-1}^{1} |t-x||t-y|dt$$

1. Montrer que φ est une fonction Lipschtzienne et justifier l'existence du réel μ.
2. Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \le x \le y \le 1\}$. Montrer que φ est une fonction polynomiale sur T qu'on exprimera.
3. Déterminer μ ainsi que l'ensemble des points où μ est atteint.

Exercice 3 – Trouver la plus petite distance entre $(0,1)$ et les points de la parabole $x^2 = 2y$.

Exercice 4 – Rechercher les extréma des fonctions suivantes

(a) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$,

(b) $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(c) $h(x,y) = x((\ln x)^2 + y^2)$,

(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4ax - 4bx$, a, b fixés.

Exercice 5 –

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$. On considère la fonction f définie sur D par la relation

$$f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy$$

1. Montrer que f admet au moins un minimum et un maximum global sur D.

2. Calculer les points critiques de f sur D.

3. Montrer qu'on peut écrire f sous la forme suivante:

$$\forall x \in D, \quad f(x,y) = \frac{3}{2}(y+x)^2 - \frac{1}{2}(y-x)^2$$

   En déduire que pour tout $(x,y) \in D$, on a $-2 \leq f(x,y) \leq 6$ et déterminer les extremas globaux de f sur D.

4. En $(0,0)$, calculer la Hessienne de f. f possède t-elle un extrémum local en $(0,0)$?

   On pourra remarquer que

$$\forall x \in D, \quad f(x,y) = (y + (2+\sqrt{3})x)(y + (2-\sqrt{3})x)$$