Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines
L3 de mathématiques et de mathématiques appliquées aux sciences sociales.
LSMA651

2010-2011 L. Dumas & T. Horsin
www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651

Exo sur le gradient et newton. TD4

Exercice 1.

Décrire la méthodes du gradient à pas fixe et la méthode de Newton sur le problème
$$\min(x^4 + x^2 - 1).$$

Exercice 2.

Convergence de la suite définie pour $a > 0$ par $x_0 \neq 0$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

Exercice 3.

Soit A une matrice carrée (de taille 2). On définit une suite de matrice B_n par $B_{n+1} = \frac{1}{2}((Id - A) + B_n^2)$ et $B_0 = 0$. On considère une norme (dite matricielle) sur les matrices $||||$ telle que
$$||MN|| \leq ||M||||N||.$$
On nota $a = ||Id - A||$.

1) Montrer par récurrence que $||B_n|| < \sqrt{a}$.

2) Montrer par récurrence que $||B_{n+p} - B_n|| \leq (\sqrt{a})^{n+1}$.
(On pourra observer que $B_{n+p} - B_n = \frac{1}{2}(B_{n+p-1} - B_{n-1}).(B_{n+p-1} + B_{n-1})$).

3) En déduire que si $a < 1$ la suite (B_n) converge vers une matrice C telle que $(I - C)^2 = A$.

4) Cette méthode est-elle une méthode de Newton ?

Exercice 4.

Sot $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

0) Montrer que le problème, trouver x_0 tel que $f(x_0) = \min f(x)$ possède une solution.

1) On introduit un algorithme de gradient de la façon suivante:
x_0 est donné et $x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k)$, où l'on a choisi
ρ_k de la façon suivante:
$\varphi_(0) + m_2\varphi_k'(0)\nabla f(x_k) \leq \varphi_k(\rho_k) \leq \varphi_k(0) + m_1\varphi_k'(0)\nabla f(x_k)$, où l'on a posé $\varphi_k(\rho) = f(x_k - \rho\nabla f(_\mathrm{k}))$
et $0 < m_1 < m_2 < 1$.
Expliquer les différences avec les conditions d'Armijo.

2) Etudier la convergence de la suite (x_k).