Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants : L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

TD6 : OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES (PARTIE 1)

Exercice 1. Montrer que l'ensemble des matrices semi-définies positives est un cône convexe.

Exercice 2. Calculer le cône tangent et le cône normal en chaque point des ensembles suivants
- $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
- $X_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 3\}$,
- $X_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\}$,
- $X_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$.

Exercice 3. Soit X et Y deux sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{a} \in \overset{\circ}{X} \cap Y$ où $\overset{\circ}{X}$ désigne l'intérieur de X. Montrer que

$$T_a(X \cap Y) = T_a Y,\ N_a(X \cap Y) = N_a Y. \tag{1}$$

Exercice 4. Vérifier dans les cas suivants que l'ensemble C est convexe puis calculez le cône normal à C en chaque point $\boldsymbol{a} \in C$ (le produit scalaire est euclidien dans chacun des cas).

1. C est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
2. C est la boule unité de $\mathbb{R}^n$
3. $C = \{\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, ..., x_k \geq 0\}$ $(k \leq m)$.

Exercice 5. On cherche à minimiser la fonction $f(x, y) = x + y^2$ sous la contrainte $x^3 - y^2 = 0$.

1. Quels sont les points vérifiant la condition de qualification ?
2. Quel est l'unique minimum de la fonction cherchée ? Conclure.

Exercice 6. On cherche à minimiser la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ sous la contrainte $ax + by = 1$ où (a, b) est un couple de rÕels non nuls.

1. Les contraintes sont-elles qualifiées ?
2. Ecrire la condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1.
3. Déterminer la nature des extremas avec la condition suffisante d'optimalité d'ordre 2.
4. Retrouver les résultats précédents avec une paramétrisation de la droite D.

Exercice 7.

1. Rechercher les rectangles d'aire maximale dans une ellipse.
2. Rechercher les triangles d'aire maximale Ĺ périmètre donné.