Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants : L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

TD7 : OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES (PARTIE 2)

Exercice 1. Résoudre graphiquement les problèmes suivants
(a) $\min x + y,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ -2x + y \leq 2,\ 3x \leq 10,\ 2x - y \leq 5,$
(b) $\min x + y,\ yx^2 - 2x \leq 0,\ y \geq 5 - x.$

Exercice 2. Résoudre les problèmes suivants

(a) $\min 3x + 5y + 6z,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y + z \geq 4,\ x + 2y + 2z \geq 6,$
(b) $\max x + y;\ y \leq 0,\ y \geq x^3,$
(c) $\max x + 2xy + 2y - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2};\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1,$
(d) $\min x^3 + y^2; x^2 + y^2 \leq \frac{25}{16},\ 2x + y + \frac{5}{4} \geq 0,$
(e) $\mathrm{Extr} x^2 + y^2;\ 3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140,$
(f) $\max x^2 + xy + y^2 + yz + z^2;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Exercice 3 (*examen 2010*) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2.$$

1) Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2) On considère les trois problèmes d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_i) \qquad \min_{(x,y)\in K_i} f(x, y), \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

où $K_1 = \mathbb{R}^3$, $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 10\}$ et $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + \frac{1}{3}y^2 \leq 1\}$.

a) Expliquer pourquoi chaque problème $(\mathcal{P}_i)$ admet une unique solution.

b) Résoudre $(\mathcal{P}_1)$ puis $(\mathcal{P}_2)$.

c) Résoudre le problème $(\mathcal{P}_3)$.

Exercice 4 (*examen 2010*) on considère le problème d'optimisation :

$$(**) \qquad \min_{x+y\leq 1} 7x^2 + 2y^2 + 7xy + 7x.$$

1) Montrer que $(**)$ est un problème convexe.

2) Montrer que $(**)$ admet une unique solution notée (a, b).

3) Ecrire les conditions (KKT) et trouver (a, b).