Correction du devoir

Exercice 1 Il est clair que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$ car c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule qu'en $\{0,0\}$.

* On a $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ et $\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Sinon. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y(x^2-y^2)+2x^2y(x^2-y^2))(x^2+y^2)+2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$= \frac{(yx^2-y^3+2x^4y-2x^2y^2)(x^2+y^2)+2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

On voit donc que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$

Regardons par exemple le deuxième terme.

$|2x^2y(x^2-y^2)| \leq |y|(x^2+y^2)(x^2+y^2)\times 2$ Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$

On fait de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$ avec

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$, De même

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$ Ce qui permet d'affirmer que le théorème de Schwarz n'est pas toujours vrai.

Exercice 2 1) On choisit $x_n \in K$ tel que $x_n \to x$ et $y_n \in K$ tel que $y_n \to y$ alors puisque K est convexe $\forall t\in[0,1]$ $tx_n+(1-t)y_n \in K$ et $tx_n+(1-t)y_n \longrightarrow tx+(1-t)y$, donc $tx+(1-t)y \in K$ si $x\in K$ et $y\in K$, donc K est convexe.

③ C'est la définition de l'adhérence.

④ On a $\|tx+(1-t)y-(tx+(1-t)y^*)\| = \|(1-t)(y-y^*)\| \leqslant (1-t)\frac{tr}{1-t} = tr.$

On peut toujours écrire. $X = t\left(\frac{X}{t}\right) = t\left(\frac{X}{t} - \left(\frac{1-t}{t}\right)y^*\right) + t\left(\frac{1-t}{t}\right)y^*$

⑤ On a $\left\|\frac{X}{t} - \frac{(1-t)}{t}y^* - x\right\| = \left\|\frac{1}{t}(X-(1-t)y^*-tx)\right\| \leqslant \frac{1}{t}r = \rho$

d'où le résultat. Puis d'après la question précédente. $X = t\left(\frac{X}{t} - \left(\frac{1-t}{t}\right)y^*\right) + t\left(\frac{1-t}{t}\right)y^*$

donc $X \in K$ donc $B(tx+(1-t)y^*, tr) \subset K$.

~~Donc~~ Or $\|tx+(1-t)y - tx+(1-t)y^*\| = |(1-t)(y-y^*)| < tr$ Donc

$tx+(1-t)y \in B(tx+(1-t)y^*, tr)$ donc $tx+(1-t)y \in \mathring{K}$ par définition de $\mathring{K}$

⑥ Si K est convexe. Soit x et $y \in \mathring{K}$, alors $x \in \mathring{K}$ et $y \in \overline{K}$, donc $tx+(1-t)y \in \mathring{K}$ d'après les questions précédentes. Ce qui prouve que $\mathring{K}$ est convexe.

7) $C = [0,1] \cup \{2\}$ est non convexe et $\mathring{C} =]0,1[$ l'est.

$C = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ n'est pas convexe, mais $\overline{C} = [0,1]$ l'est.

Exo 3

1) $x \neq 0$ $\frac{x}{\varepsilon(\|x\|+1)} \in B(0,\varepsilon)$. donc $\exists \lambda > 0 / \frac{x}{\lambda} \in B(0,\varepsilon)$

Donc $\{\lambda / \frac{x}{\lambda} \in K\}$ est non vide et non contenant pas 1.

Donc $p(x)$ existe.

2) Si $p(x) = 0$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda \in]0,\varepsilon[$ tel que $\frac{x}{\lambda} \in K$

or si $x \neq 0$ pour λ assez petit $\frac{x}{\lambda} \notin K$ car $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} \to +\infty$

donc $x = 0$.

et K est un compact donc borné.

3) Si $p(x) < 1$ alors $1 > \inf\{\lambda / \frac{x}{\lambda} \in K\}$ Par définition de l'inf

$\exists 0 < \mu < 1$ tel que $\frac{x}{\mu} \in K$. Or $x = \mu \frac{x}{\mu}$ $0 < \mu < 1$. D'où d'après le résultat de l'exercice 2 $x \in \mathring{K}$. (x est le barycentre de $\frac{x}{\mu} \in K$ et $0 \in \mathring{K}$)

4) Soit $x \in \mathring{K}$. $\exists \rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subset \mathring{K}$. Or pour λ assez proche de 1 $\lambda < 1$ $\frac{x}{\lambda} \in B(x,\rho)$. donc $p(x) < 1$. En effet $\frac{x}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to 1]{} x$. d'où le résultat

5)

(3)

5) $\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu}$ donc comme $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu} = 1$

on en déduit que $\frac{x+y}{\lambda+\mu} \in K$. Donc $p(x+y) \leqslant \lambda+\mu$. Ceci étant vrai $\forall \lambda \,/\, \frac{x}{\lambda} \in K$, $\mu \,/\, \frac{y}{\mu} > 0$ on en déduit que $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$

6) Soit $x \neq 0$ si $\frac{x}{\lambda} \in K$ alors $\frac{\mu x}{\mu\lambda} \in K$ donc $p(\mu x) \leqslant \mu\lambda$ $\forall \lambda \,/\, \frac{x}{\lambda} \in K$

donc $p(\mu x) \leqslant \mu p(x)$

Donc $\mu p(x) = \mu p\left(\frac{1}{\mu}\mu x\right) \leqslant \frac{\mu}{\mu} p(\mu x)$.

donc $\forall \mu > 0$ $p(\mu x) = \mu p(x)$

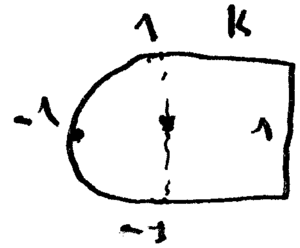
7) $\forall x \,/\, x \in K$ $-x \in K$ donc $p(-x) = p(x)$ * et p est une norme car on vérifie tous les axiomes.

* car $\frac{x}{\lambda} \in K \Leftrightarrow -\frac{x}{\lambda} \in K$.

De plus $\{x \,/\, p(x) < 1\} = \mathring{K}$. On sait déjà que $\{x \,/\, p(x) < 1\} \subset \mathring{K}$

Soit $x \in \mathring{K}$ alors $\frac{x}{1} \in K$ donc $p(x) < 1$.

Comme p est une norme $\overline{K} = \{x \,/\, p(x) \leqslant 1\} = K$.

8) 

$p(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ si $x \leqslant 0$

$p(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$ si $x \geqslant 0$,