Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines
L3 de mathématiques et de mathématiques appliquées aux sciences sociales.
LSMA651

2010-2011

L. Dumas & T. Horsin
www.math.uvsq.fr/∼dumas/LSMA651

Devoir d'optimisation.

A remettre dans les casiers de vos enseignants de TD, au plus tard le mercredi 16/02.

Exercice 1.

On considère la fonction suivante:

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y)=0 \\ \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

2) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

3) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 2.

On rappelle que dans $\mathbb{R}^N$, on peut définir des ouverts:
on dira que $U \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert, si U est vide, ou si $\forall x_0 \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B_O(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^N,\ ||x - x_0|| < r\} \subset U$ (l'indice O est oté quand il n'y a pas de confusion).
Si F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ tel que ${}^cF$ est un ouvert, F est appelé fermé. Si F est fermé alors, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, si $\exists x_n \in F$ tel que $x_n \to x$ alors $x \in F$.
Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. On définit l'intérieur et l'adhérence de A de la façon suivante:

$$\mathring{A} := \{x_0 \in A,\ \exists r > 0,\ B_O(x_0, r) \subset A\};$$

c'est un ouvert par définition et c'est le plus grand ouvert (éventuellement vide) inclus dans A.
Par symétrie, si l'on considère $B := {}^cA$ alors $\mathring{B}$ est le plus grand ouvert inclus dans B. Son complémentaire est un fermé, contenant A et c'est le plus petit, il est noté $\overline{A}$.
Soit K un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^N$.

1) Soit $(x,y) \in \overline{K}$. Soit $t \in [0,1]$. Montrer qu'il existe deux suites x_n et y_n d'éléments de K tels que $tx_n + (1-t)y_n \to tx + (1-t)y$.

2) En déduire que $\overline{K}$ est convexe.
Soit $x \in \mathring{K}$ et $y \in \overline{K}$. On se propose de montrer que $\forall t \in]0,1[$, $tx + (1-t)y \in \mathring{A}$. Noter que pour $t = 0$, il n'y a rien à démontrer.

3) On prend $r>0$ tel que $B(x,r)\subset K$ et $r^*>0$ que l'on choisira ultérieurement. Pourquoi existe-t-il $y^*\in K\cap B(y,r^*)$?

4) Montrer que si l'on prend $r^*=\frac{tr}{1-t}$ alors $tx+(1-t)y\in B(tx+(1-t)y^*,tr)$.
Soit $X\in B(tx+(1-t)y^*,tr)$, montrer que $X=t(\frac{X}{t}-\frac{1-t}{t}y^*)+(1-t)y^*$.

5) Montrer que $\frac{X}{t}-\frac{1-t}{t}y^*\in B(x,r)$. En déduire que $B(tx+(1-t)y^*,tr)\subset K$ puis que $tx+(1-t)y\in\mathring{K}$.

6) Montrer que $\mathring{K}$ est convexe dés que K l'est.

7) Donner un exemple d'ensemble $C\subset\mathbb{R}^2$ non convexe tel que $\mathring{C}$ est convexe et un ensemble $C\subset\mathbb{R}$ non convexe tel que $\overline{C}$ est convexe.

Exercice 3.

Pour les plus motivés.
Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^N$. On suppose que $\mathring{K}\ni 0$. Pour $x\in\mathbb{R}^N$, on définit le nombre suivant:
$$p(x):=\inf\{\lambda>0,\,\frac{x}{\lambda}\in K\}.$$
On se propose de montrer que p est bien définie, et que dans certaines situations (impliquant des hyptohèses supplémentaires) sur K, que p est une norme dont K est la boule unité.

1) Soit $\varepsilon>0$ tel que $B(0,\varepsilon)\subset K$. Montrer que pour $x\neq 0$ il existe $\lambda>0$ tel que $\frac{x}{\lambda}\in B(0,\varepsilon)$. En déduire que $p(x)$ est bien définie.

2) On suppose que $p(x)=0$. Montrer que $x=0$.

3) Soit x tel que $p(x)<1$. On choisit $0<\lambda<1$ tel que $\frac{x}{\lambda}\in K$. Expliquer pourquoi un tel choix existe. Montrer que $x=\lambda\frac{x}{\lambda}\in\mathring{K}$.

4) Soit $x\in\mathring{K}$ non nul. Montrer qu'il existe $0<\lambda<1$ tel que $\frac{x}{\lambda}<1$. En déduire que $p(x)<1$.

5) Soit x et y deux éléments distincts et non nuls. Soit $\lambda>0$ tel que $\frac{x}{\lambda}\in K$ et $\mu>0$ tel que $\frac{y}{\mu}\in K$. Montrer que $\frac{x+y}{\lambda+\mu}\in K$ (utiliser la convexité de K). En déduire que $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$.

6) Montrer que $\forall\mu>0$, $p(\mu x)=\mu p(x)$.

7) On suppose de plus que $\forall x\in K$, $-x\in K$. Montrer que p est une norme dont K est la boule unité fermé.

8) Déterminer p lorsque $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\,x\leq 0,\,x^2+y^2\leq 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\,0\leq x\leq 1,-1\leq y\leq 1\}$.