Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants : L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

EXAMEN, 17 MAI 2011
2heures, pas de documents

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2x - 10y$$

1. Montrer que f est coercive sur $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer les points où f est minimale sur $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z^2 = 0\}$. A est-il fermé ? borné ? Montrer sans calcul que f possède au moins un minimum sur A.
4. Calculer les points où f est minimale sur A.

Exercice 2.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x,y,z) = x + 2y + z$$

On note

$$B = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ x + 4y + 2z \leq 10 \text{ et } x + z \leq 2\}$$

1. Donner une situation en économie où ce genre de problème apparait. On pourra par exemple considérer une usine fabriquant 3 produits avec 2 ingrédients pour leur réalisation.
2. En utilisant la méthode du simplexe, déterminer le maximum de g sur B ainsi qu'un point où il est atteint.

Exercice 3.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$h(x,y,z) = xyz + yz + xz + xy$$

1. Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^3$ où le matrice hessienne de h est semi-définie positive est le point $(-1,-1,-1)$.
2. Montrer que h ne possède aucun minimum local sur $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que h possède un minimum sur

   $$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$$

   qu'on déterminera par des considérations simples.

Exercice 4.

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

On note

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D.
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur D.
3. (*question bonus)* Calculer le cône tangent et le cône normal à D en chaque point de D.