Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants : L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

EXAMEN SESSION 2
23 Juin 2011
2heures, pas de documents

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 - y^4 - 8x$$

1. Montrer que f n'est pas coercive sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. f admet-elle des extrema locaux ?
3. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^4 + y^4 = 1\}$. A est-il fermé ? borné ?
4. Calculer les points où f est minimale sur A en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Vérifier le résultat en remplaçant y par sa valeur dans l'expression de f.

Exercice 2.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x,y,z) = 5x + 4y + 3z$$

On note

$$B = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ 2x + 3y + z \leq 5\ \ 4x + y + 2z \leq 11 \,\text{et}\, 3x + 4y + 2z \leq 9\}$$

1. Donner une situation en économie où ce genre de problème apparait. On pourra par exemple considérer une usine fabriquant 3 produits avec 3 ingrédients pour leur réalisation.
2. En utilisant la méthode du simplexe, déterminer le maximum de g sur B ainsi qu'un point où il est atteint.

Exercice 3.

Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x,y) := x^2 + \alpha y^2 + xy + x$ pour un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche à minimiser f_α sur

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \leq 1\}$$

a) Pour quelles valeurs de α f_α est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? Résoudre le problème posé dans ce cas.

b) Lorsque f_α n'est pas convexe, f_α possède-t-elle un minimum sur C ?

Exercice 4.

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2,$$

où a et b sont deux réels On note

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 2\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D.
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur D.
3. (*question bonus*) Calculer le cône tangent et le cône normal à D en chaque point de D.