Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants : L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

EXAMEN, 17 MAI 2011, CORRECTION
2heures, pas de documents

Exercice 1.

1. f est coercive car on peut écrite :

   $$f(x,y,z) \geq 3x^2+3y^2+3z^2-(x^2+y^2)-2x-10y = 2x^2+2y^2+3z^2-2x-10y$$

   soit
   $$f(x,y,z) \geq 2(x-\frac{1}{2})^2+2(y-\frac{5}{2})^2+3z^2-13$$
   et on conclut facilement que $f(x,y,z)$ tend vers $+\infty$ quand $||(x,y,z)||$ tend vers $+\infty$ où $||.||$ désigne la norme euclidienne.

2. On résout
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x-2y-2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6y-2x-10=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6z=0 \end{cases}$$
   qui a pour unique solution $(x,y,z)=(1,2,0)$. Comme f est coercive et continue, elle possède au moins un minimum sur $\mathbb{R}^2$. Tous ses minima étant des points critiques, il n'y en a qu'un et il s'agit de $(x,y,z)=(1,2,0)$.

3. A est un ensemble fermé (condition égalité) mais n'est pas borné (par exemple $(-n,n,0)\in A$ pour tout $n\in\mathbb{N}$). Cependant f possède toujours un minimum sur A car f est coercive et continue et A est fermé.

4. On écrit la CN1 : en supposant les contraintes qualifiées au point considéré, si (x,y,z) est un minimum de f sur A, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

   $$\begin{cases} 6x-2y-2+\lambda=0 \\ 6y-2x-10+\lambda=0 \\ 6z+2\lambda z=0 \\ x+y+z^2=0 \end{cases}$$

   Le cas $\lambda=-3$ implique $x=\frac{7}{4}$ et $y=\frac{11}{4}$ ce qui n'aboutit pas car z^2 est alors strictement négatif. Le cas $z=0$ conduit à $x=-y=-\frac{1}{2}$ et $\lambda=6$. L'unique minimum de f sur A est donc le point $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$. Par ailleurs les contraintes sont toujours qualifiées car le vecteur $(1,1,2z)$ est toujours non nul.

Exercice 2.

1. En économie le problème correspond à l'optimisation du gain de la fabrication de 3 produits ayant respectivement une marge unitaire de 1, 2 et 1 euro. Ces 3 produits nécessitent respectivement 1, 4 et 2 heures d'usinages dans l'usine 1 (durée maximale de fonctionnement journalier : 10h) et 1, 0 et 1 heure d'usinage dans l'usine 2 (durée maximale de fonctionnement journalier : 2h).
2. On note x_4 et x_5 les variables d'écart (positives). Avec la méthode du simplexe, on obtient successivement les résultats suivants :

Etape 1 :

	x	y	z	x_4	x_5	S	θ
x_4	1	4	2	1	0	10	$\frac{5}{2}$
x_5	1	0	1	0	1	2	
	-1	-2	-1	0	0	0	

Etape 2 :

	x	y	z	x_4	x_5	S	θ
y	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$	10
x_5	1	0	1	0	1	2	2
	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	5	

Etape 3 :

	x	y	z	x_4	x_5	S	θ
y	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	2	
x	1	0	1	0	1	2	
	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6	

Le maximum de g est donc atteint au point $(x, y, z) = (2, 2, 0)$ et vaut 6.

Exercice 3.

1. On trouve comme matrice hessienne pour h au point (x, y, z) :

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & z+1 & y+1 \\ z+1 & 0 & x+1 \\ y+1 & x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

La trace de H est égale à 0. Pour que toutes ses valeurs propres soient positives, il faut donc que H soit nulle, c'est à dire $x = y = z = -1$. Réciproquement, dans ce cas $H = 0$ est donc bien semi définie positive.

2. Si h possède un minimum en (x, y, z), alors sa matrice hessienne en ce point est semi définie positive (CN2). Nécessairement, on a donc $x = y = z = -1$. Or, en ce point $\frac{\partial h}{\partial x}(-1, -1, -1) = -1 \neq 0$. h ne possède donc pas de minimas locaux.
3. Comme C est fermé borné donc compact, h possède un minimum sur C. Il est forcément atteint sur la frontière de C au vu de la question précédente. Comme x, y et z jouent un rôle symétrique, on parcourt par exemple tout d'abord l'arête $x = -1$: dans ce cas, la fonction $\tilde{h}(y, z) = -y - z$ est minimale pour $y = z = 1$ et vaut -2. De même, en parcourant l'arête $x = 1$, la fonction $\hat{h}(y, z) = 2yz + y + z$ est minimale pour $(y, z) = (-1, 1)$ et $(y, z) = (1, -1)$ et vaut -2. Au final, h est minimal sur C en $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ et $(1, 1, -1)$ où elle vaut -2.

Exercice 4.

1. La matrice hessienne de u est constante sur $\mathbb{R}^2$ et vaut $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est définie positive, par exemple avec le critère de Sylvester. u est donc strictement convexe. En outre, elle est coercive sur $\mathbb{R}^2$ car

$$u(x,y) \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Avec ces deux propriétés, on en déduit que u possède un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$.

2. Si (x,y) est un minimimum de u sur D et en supposant les contraintes qualifiées en ce point, il existe $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} 2x+y+2x\alpha-\beta=0 \\ 2y+x+2\alpha y-\beta=0 \\ \alpha(x^2+y^2-1)=0 \\ \beta(-x-y+1)=0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \\ -x-y+1 \leq 0 \end{cases}$$

Le cas $\alpha=\beta=0$ conduit à la solution $x=y=0$ qui n'est pas dans D. Le cas $\alpha>0$ et $\beta=0$ conduit à $x=y=0$ ou à $\alpha=-1$ ce qui est à nouveau impossible. Le cas $\alpha>0$ et $\beta>0$ correspond aux deux points $(1,0)$ et $(0,1)$ qui ne peuvent être solution du système (car cela implique que $\beta=1$ et $\alpha=-\frac{1}{2}$).
Il reste le cas $\alpha=0$ et $\beta>0$ pour lequel on se ramène au système

$$\begin{cases} 2x+y-\beta=0 \\ 2y+x-\beta=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

qui a pour solution $x=y=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{3}{2}$. Les contrantes sont par ailleurs qualifiées en ce point, soit parce que la seule contrainte active est linéaire, soit parce que son gradient est non nul.

3. La question bonus pouvait être résolue à partir d'un dessin de D (lunule).