Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2010-2011
Enseignants : L. Dumas, T. Horsin
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/LSMA651`

EXAMEN PARTIEL, 21 MARS 2011, 1h30

MASS : Ex. 1 ou 2 au choix plus 2 exercices parmi 3, 4 et 5

non MASS : Ex. 1 ou 2 au choix plus les exercices 3 et 4

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2. f est-elle C^1 en $(0,0)$?
3. Le point $(0,0)$ est-il un point critique pour f ? Est-il un minimum local ?
4. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien usuel, noté $< \cdot,\cdot >$, la norme euclidienne associée étant notée $||.||$. On dit qu' une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est α-convexe s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^N)^2, \forall t \in [0,1], f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)||x-y||^2.$$

1. On suppose que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est α-convexe ;
   (b) Il existe une constante $\beta > 0$, telle que
   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, f(y) - f(x) \geq < \nabla f(x), y-x > + \beta ||x-y||^2;$$
   (c) il existe une constante $\gamma > 0$, telle que
   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, < \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x > \geq \gamma ||x-y||^2.$$
2. On suppose que f est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est α-convexe si et seulement s'il existe $\delta > 0$ telle que
   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^N)^2, D^2 f(x)(y,y) \geq \delta ||y||^2$$
   .

3. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

4. Montrer que f est α-convexe si et seulement si la matrice A est définie positive.

Exercice 3.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 12xy$$

Soit Ω l'ensemble défini par $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0,\ y > 0,\ xy > 1\}$.

1. Représenter graphiquement Ω. Montrer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur Ω.
3. Trouver tous les extremas de f sur Ω (en précisant leur nature).
4. f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Soit $P = \{(x, y, z) \in R^3, \quad ax + by + cz = 1\}$ où $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.

1. Quelle est la nature de P ?
2. Montrer que f possède un unique minimum (x^*, y^*, z^*) sur P.
3. Déterminer (x^*, y^*, z^*) en écrivant les conditions nécessaires d'optimalité d'ordre 1.

Exercice 5.

Pour $a > 0$ et $x_0 \in]0, 2a[$, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = 2x_n - \frac{x_n^2}{a}$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une méthode de Newton.
2. On considère la fonction $g(x) = 2x - \frac{x^2}{a}$. En considérant le signe de $g(x) - x$, montrer, par récurrence, que si $x_0 \in]0, a]$, on a $0 < x_n \leq x_{n+1} \leq a$. En déduire que la suite converge.
3. On suppose que $x_0 \in [a, 2a[$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < x_n \leq x_{n+1} \leq a$. Montrer alors la convergence de la suite (x_n).