Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2011-2012
Enseignants: L. Dumas, J.P. Bartier, M.Z. Dauhoo
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html`

EXAMEN CONTRÔLE CONTINU, 19 mars 2012

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique définie positive de taille n et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction J de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

On note $0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda_1 ||x||^2 \leq < Ax, x >$$
En déduire que J est une application coercive.

2. Calculer le gradient de J puis la hessienne de J en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Montrer que J possède un unique minimum x^* sur $\mathbb{R}^n$ caractérisé par la condition $Ax^* = b$.

4. Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0 = 0$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \alpha(Ax_k - b)$$
Montrer que
$$\boldsymbol{x}_{k+1} - x^* = (I - \alpha A)(x_k - x^*)$$
où I désigne la matrice identité de taille n.

5. Calculer les valeurs propres de la matrice $I - \alpha A$. En déduire que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^* lorsque $\alpha \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$.

Exercice 2.

On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 1 + x^2 + y^3 \\ f_2(x,y) = xy \\ f_3(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x^4 \end{cases}$$

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique pour f_1, f_2 et f_3.
2. Quelles sont les fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$ parmi f_1, f_2 et f_3?
3. Pour quelles fonctions $(0,0)$ est-il un minimum local?
4. Pour quelles fonctions $(0,0)$ est-il un minimum global?

Exercice 3.

On considère l'ensemble $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1\}$.

1. Représenter K. Montrer que K est convexe (on ne se contentera pas de le vérifier sur le dessin). K est-il compact?
2. On considère la fonction J définie sur K par

$$\forall x \in K, \quad J(x,y) = x^2 + y^2 - x - \frac{3}{2}y$$

3. Montrer que J possède un minimum et un maximum sur K.
4. Déterminer les points où J atteint son minimum sur K.
5. Déterminer les points où J atteint son maximum sur K.