Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2011-2012
Enseignants: L. Dumas, M.Z. Dauhoo, J.P. Bartier
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651

TD1 : REVISIONS CALCUL DIFFERENTIEL

Exercice 1. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 des fonctions suivantes, puis calculer le vecteur gradient et la matrice hessienne au point indiqué:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & x^2y + y^2x + e^{xy}, \text{ Point : } (0,1), \\ g(x,y,z) & = & \cos(xy) + x^2y^3z^4, \text{ Point : } (0,1,2). \end{array}$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$, et la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$|f(x,y)| \leq C(x^2+y^2)$$

   et

   $$|g(x,y)| \leq C(x^2+y^2)$$

2. En déduire que f et g sont deux fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$. On distinguera le cas du point $(0,0)$ des autres points de $\mathbb{R}^2$.

3. .La fonction f (respectivement g) est-elle C^1 en $(0,0)$?

Exercice 3. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$. On considère la fonction f définie sur D par:

$$f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy$$

1. Montrer que f est bornée sur D et atteint ses bornes.

2. Déterminer les points critiques de f (c'est à dire les points où $\nabla f(x)$ est nul) sur $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 < x < y < 1\}$.

3. Montrer qu'on peut écrire f sous la forme suivante:
$$\forall x \in D, \quad f(x,y) = \frac{3}{2}(y+x)^2 - \frac{1}{2}(y-x)^2 \tag{1}$$

4. Représenter dans le plan les lignes de niveau de f à savoir les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels f prend une valeur constante.

5. Montrer que pour tout $(x,y) \in D$, on a $-2 \leq f(x,y) \leq 6$

6. En déduire l'ensemble des points de D où f atteint ses bornes.

7. Montrer que le point origine O n'est pas un extremum local de f sur D à savoir
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists (X_1, X_2) \in D^2, \quad ||X_1|| < \epsilon, \quad ||X_2|| < \epsilon \quad \text{et} \quad f(X_1) < f(O) < f(X_2)$$

Exercice 4. On considère dans tout cet exercice une fonction f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et que toutes ses dérivées partielles sont bornées par $M \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq M\sqrt{n}||x-y||$$
où $||.||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

2. On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que f est continue en 0 et que toutes ses fonctions dérivées partielles tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. Montrer que f est différentiable en 0.

3. On suppose que f est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que toutes ses dérivées partielles sont bornées par $M \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que f est continument prolongeable à $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $n \geq 2$. Dans ce cas, f est-elle nécessairement différentiable en 0?