Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2011-2012
Enseignants : L. Dumas, J.P. Bartier, M.Z. Dauhoo
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651`

TD 9 : PROGRAMMATION LINEAIRE

Exercice 1 Un patissier vend des cornets de glace, les uns à une boule, les autres à deux boules. On se propose de déterminer le bénéfice maximal qu'il peut espérer faire en un jour, compte tenu de la quantité de glace et du nombre de cornets dont il dispose. Les données sont les suivantes
- Le bénéfice par cornet à une boule est de 0.15 euros, et de 0.22 euros par cornet à deux boules.
- Chaque jour, le marchand dispose de 60 cornets à une boule et de 60 cornets à deux boules.
- Le marchand vend au plus 100 cornets par jour.
- Le marchand dispose de suffisament de glace pour faire 150 boules par jour.

1. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions réalisables.
2. Résoudre le problème graphiquement.
3. Résoudre le problème par la méthode du simplexe.

Exercice 2 Un artisan joallier doit fabriquer des bracelets de deux types, A et B. Les consignes de fabrication sont les suivantes :
- Chaque bracelet doit contenir 10g d'or.
- Un bracelet de type A doit contenir en outre 20g d'argent et être décoré de 10 éclats de diamant.
- Un bracelet de type B doit contenir en outre 50g d'argent et être décoré de 40 éclats de diamant.
- Un bracelet A demande 3 heures de travail et un bracelet B, 2 heures.
- Le joallier dispose de 207g d ór, 600g d'argent et de 450 éclats de diamants.
- Les délais imposés permettent 46 heures de travail.
- On désigne par x le nombre de bracelets de type A et par y le nombre de bracelets de type B. Ecrire l'ensemble des contraintes de fabrication et les représenter graphiquement.
- L'artisan est rémuneré de la manière suivante : 30 euros pour un bracelet de type A et 42 euros pour un bracelet de type B.

1. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions réalisables.
2. Résoudre le problème par la méthode du simplexe.
3. Il doit justifier de l'emploi de la matière première et rendre celle qui n'est pas utilisée. Quel nombre de bracelets de chaque type doit-il fabriquer pour obtenir le meilleur salaire ? A combien s'éleve alors son salaire horaire ? Quelle matière première doit-il rendre ?

Exercice 3 Résoudre le problème d'optimisation :

$$(\mathcal{P})_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 \geq 3. \end{array} \right.$$

Exercice 4 (examen 2010) Résoudre les deux problèmes de maximisation suivant par la méthode du simplexe :

$$1)\begin{cases} \text{Max} \qquad 3x+2y+8z \\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \\ x+y+4z\leq 8 \\ x+3z\leq 5 \\ 2x+y+6z\leq 14. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} \text{Max} \qquad 3x_1+5x_2+6x_3 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \\ x_1+2x_2+4x_3\leq 70 \\ 2x_1+x_2+2x_3\leq 80 \\ 3x_1+2x_2+2x_3\leq 60. \end{cases}$$

Exercice 5. (examen 2011)

Maximiser la fonction $g(x,y,z)=x+2y+z$ sur l'ensemble

$$B=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3,\ x+4y+2z\leq 10 \text{ et } x+z\leq 2\}$$

Exercice 6. (rattrapage 2011)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x,y,z)=5x+4y+3z$$

On note

$$B=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3,\ 2x+3y+z\leq 5\ \ 4x+y+2z\leq 11 \,\text{et}\, 3x+4y+2z\leq 9\}$$

1. Donner une situation en économie où ce genre de problème apparait. On pourra par exemple considérer une usine fabriquant 3 produits avec 3 ingrédients pour leur réalisation.
2. En utilisant la méthode du simplexe, déterminer le maximum de g sur B ainsi qu'un point où il est atteint.