Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2011-2012
Enseignants: L. Dumas, J.P. Bartier, Z. Dauhoo
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651`

TD 3 : FONCTIONS CONVEXES

Exercice 1 –

Soit D un disque fermé de $\mathbb{R}^2$, contenant un voisinage de 0. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x,y) = \int\int_D \exp(ux+vy)dudv$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\lim_{||(x,y)|| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

2. Montrer que f est strictement convexe
3. En déduire que f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 –

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien usuel, noté $< \cdot, \cdot >$, la norme euclidienne associée étant notée $||.||$. On dit qu' une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est α-convexe s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^N)^2, \forall t \in [0,1], f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)-\frac{\alpha}{2}t(1-t)||x-y||^2.$$

1. On suppose que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est α-convexe;

(b) Il existe une constante $\beta > 0$, telle que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, f(y) - f(x) \geq < \nabla f(x), y - x > + \beta ||x - y||^2;$$

(c) il existe une constante $\gamma > 0$, telle que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, < \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x > \geq \gamma ||x - y||^2.$$

2. On suppose que f est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est α-convexe si et seulement s'il existe $\delta > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^N)^2, D^2 f(x)(y,y) \geq \delta ||y||^2$$

.

3. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

Montrer que f est α-convexe si et seulement si la matrice A est définie positive.

Exercice 3 –

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 12xy$$

Soit Ω l'ensemble défini par $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0, \, y > 0, \, xy > 1\}$.

1. Représenter graphiquement Ω. Montrer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur Ω.
3. f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?