Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2011-2012
Enseignants: L. Dumas, J.P. Bartier, M.Z. Dauhoo
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html`

TD 4 : OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

Exercice 1.

1. Soient u et v deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = ||xu + yv||$$

Montrer que g est minorée par un réel strictement positif m sur l'ensemble

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

En déduire que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) \geq m\sqrt{x^2+y^2}$$

2. Soit $(p_1, ..., p_k)$ une suite de k points de $\mathbb{R}^2$ avec $k \geq 2$. On pose $p_j = (\alpha_j, \beta_j)$ et on suppose que la suite (α_j) est strictement croissante. On considère alors la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \sum_{j=1}^{k} (\beta_j - x\alpha_j - y)^2$$

Montrer que f est coercive. En déduire qu'il existe (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$f(x_0, y_0) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$$

3. Calculer un tel (x_0, y_0) et montrer qu'il est unique.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2x - 10y$$

1. Montrer que f est coercive sur $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire?

2. Calculer les points où f est minimale sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

Rechercher les extrema des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$,

(b) $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(c) $h(x,y) = x((\ln x)^2 + y^2)$,

(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4ax - 4bx$, a, b fixés.

Exercice 4.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$h(x,y,z) = xyz + yz + xz + xy$$

1. Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^3$ où le matrice hessienne de h est semi-définie positive est le point $(-1,-1,-1)$.

2. Montrer que h ne possède aucun minimum local sur $\mathbb{R}^3$.