Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
**L3, Optimisation et Applications (LSMA651)**
Année 2011-2012
Enseignants: L. Dumas, J.P. Bartier, M.Z. Dauhoo
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html

## TD 6 : OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE (part. 1)

**Exercice 1.** Calculer le cône tangent et le cône normal en chaque point des ensembles suivants:

- $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
- $X_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 3\}$,
- $X_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\}$,
- $X_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$.
- $X_6$ est la boule unité de $\mathbb{R}^3$
- $X_7 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$.

**Exercice 2.** Soit $X$ et $Y$ deux sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{a} \in \overset{\circ}{X} \cap Y$ où $\overset{\circ}{X}$ désigne l'intérieur de $X$ (c'est à dire le plus grand ouvert contenu dans $X$). Montrer que

$$T_a(X \cap Y) = T_a Y,\ N_a(X \cap Y) = N_a Y. \tag{1}$$

Interpréter ce résultat.

**Exercice 3.** On cherche à minimiser la fonction $f(x,y) = y^2 - x$ sur l'ensemble $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^3 - y^2 = 0\}$.

1. Montrer que $f$ possède un minimum sur $X$.
2. Calculer le cône normal à $X$ en tout point de $X$. En déduire la condition nécessaire d'ordre 1 pour qu'un point $(x,y)$ soit un minimum de $f$ sur $X$. Conclure.

3. Retrouver le résultat précédent avec une paramétrisation de l'ensemble $X$.

**Exercice 4.** On cherche à minimiser la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ sur l'ensemble $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 1\}$.

1. Montrer que $f$ possède un unique minimum sur $X$.

2. Calculer le cône normal à $X$ en tout point de $X$. En déduire la condition nécessaire d'ordre 1 pour qu'un point $(x, y)$ soit un minimum de $f$ sur $X$. Conclure.

3. Retrouver le résultat précédent avec une paramétrisation de l'ensemble $X$.