Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2011-2012
Enseignants : L. Dumas, J.P. Bartier, M.Z. Dauhoo
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651`

TD8 : OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES (part. 3)

Exercice 1. Résoudre graphiquement les problèmes suivants
(a) $\min x + y,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ -2x + y \leq 2,\ 3x \leq 10,\ 2x - y \leq 5,$
(b) $\min x + y,\ yx^2 - 2x \leq 0,\ y \geq 5 - x.$

Exercice 2. Résoudre (mathématiquement) les problèmes suivants

(a) $\min 3x + 5y + 6z,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + 2y + z \geq 4,\ x + 2y + 2z \geq 6,$
(b) $\max x + y;\ y \leq 0,\ y \geq x^3,$
(c) $\max x + 2xy + 2y - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2};\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1,$
(d) $\min x^3 + y^2; x^2 + y^2 \leq \frac{25}{16},\ 2x + y + \frac{5}{4} \geq 0,$

Exercice 3 (*examen 2010*) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2.$$

1) Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2) On considère les trois problèmes d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_i) \qquad \min_{(x,y)\in K_i} f(x, y), \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

où $K_1 = \mathbb{R}^3$, $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 10\}$ et $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + \frac{1}{3}y^2 \leq 1\}$.

a) Expliquer pourquoi chaque problème $(\mathcal{P}_i)$ admet une unique solution.

b) Résoudre $(\mathcal{P}_1)$ puis $(\mathcal{P}_2)$.

c) Résoudre le problème $(\mathcal{P}_3)$.

Exercice 4 (*examen 2010*) on considère le problème d'optimisation :

$$(**) \qquad \min_{x+y\leq 1} 7x^2 + 2y^2 + 7xy + 7x.$$

1) Montrer que $(**)$ est un problème convexe.

2) Montrer que $(**)$ admet une unique solution notée (a, b).

3) Ecrire les conditions (KKT) et trouver (a, b).

Exercice 5 (*examen 2011*) On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

On note

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D.
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur D.

Exercice 6 (*rattrapage 2011*)

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2,$$

où a et b sont deux réels On note

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 2\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D.
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur D.

Exercice 7 (*rattrapage 2011*)

Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x, y) := x^2 + \alpha y^2 + xy + x$ pour un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche à minimiser f_α sur

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \leq 1\}$$

a) Pour quelles valeurs de α f_α est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? Résoudre le problème posé dans ce cas.

b) Lorsque f_α n'est pas convexe, f_α possède-t-elle un minimum sur C ?