Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2012-2013
Enseignants : L. Dumas, J.P. Bartier, E. Echague
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651`

EXAMEN MI-PARCOURS, 25 mars 2013, 1h30

Exercice 1.

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $g(x) = \|x\|_2^2 + 1$. Montrez que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $\nabla g(x)$. On rappelle que $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = \frac{1}{g(x)}$. Montrez que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer $\nabla f(x)$. Montrez que $df(x)(h) = -\frac{2<x,h>}{(1+\|x\|_2^2)^2}$ pour tout x, h dans $\mathbb{R}^n$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, calculez $\|\nabla f(x)\|_2$ en fonction de $\|x\|_2^2$ et montrez que

$$\|\nabla f(x)\|_2 \leq 1$$

.

4) Montrez que $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|_2$ et que $1 - \|x\| \leq f(x) \leq 1$ pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$.

5) Calculez la matrice hessienne de f.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$.

1)Déterminez les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.

2) Montrez que $f(x, y, z)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de carrés.

3) En déduire les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

Soit $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non-vide et $x \in K_1$. Soit K_2 un ensemble tel que $K_1 \subset K_2$. Montrer que

$$T_x(K_1) \subset T_x(K_2).$$

Exercice 4.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

et

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x$$

Nous voulons minimiser f sur l'ensemble $g^{-1}(0) = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$

1. Représenter graphiquement l'ensemble $g^{-1}(0)$.
2. La fonction f, est-elle coercive ? L'ensemble $g^{-1}(0)$ est-il convexe ? Est-il compact ? Justifier.
3. Pour le problème de minimisation, écrire les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre et résoudre ce système (en vérifiant la qualification des solutions obtenues).
4. Justifier que le problème de minimisation admet une solution globale, donner sa valeur en explicitant votre raisonnement.