

Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines  
**L3, Optimisation et Applications (LSMA651)**  
Année 2012-2013  
Enseignants: L. Dumas, E. Echague, J.P. Bartier  
<http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651>

### TD1 : COMPLEMENTS CALCUL DIFFERENTIEL

**Exercice 1.** Calculer toutes les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 des fonctions suivantes, puis calculer le vecteur gradient et la matrice hessienne au point indiqué:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^2y + y^2x + e^{xy}, \text{ Point : } (0, 1), \\g(x, y, z) &= \cos(xy) + x^2y^3z^4, \text{ Point : } (0, 1, 2).\end{aligned}$$

**Exercice 2.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ , et la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$g(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $g(0, 0) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tous  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|f(x, y)| \leq C(x^2 + y^2)$$

et

$$|g(x, y)| \leq C(x^2 + y^2)$$

2. En déduire que  $f$  et  $g$  sont deux fonctions différentiables sur  $\mathbb{R}^2$ . On distinguera le cas du point  $(0, 0)$  des autres points de  $\mathbb{R}^2$ .
3. La fonction  $f$  (respectivement  $g$ ) est-elle  $C^1$  en  $(0, 0)$ ?

**Exercice 3.** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $D$  par:

$$f(x, y) = (y - x)^2 + 6xy$$

1. Montrer que  $f$  est bornée sur  $D$  et atteint ses bornes.
2. Déterminer les points critiques de  $f$  (c'est à dire les points où  $\nabla f(x)$  est nul) sur  $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < y < 1\}$ .
3. Montrer qu'on peut écrire  $f$  sous la forme suivante:

$$\forall x \in D, \quad f(x, y) = \frac{3}{2}(y + x)^2 - \frac{1}{2}(y - x)^2 \quad (1)$$

4. Représenter dans le plan les lignes de niveau de  $f$  à savoir les sous ensembles de  $\mathbb{R}^2$  sur lesquels  $f$  prend une valeur constante.
5. Montrer que pour tout  $(x, y) \in D$ , on a  $-2 \leq f(x, y) \leq 6$
6. En déduire l'ensemble des points de  $D$  où  $f$  atteint ses bornes.
7. Montrer que le point origine  $O$  n'est pas un extremum local de  $f$  sur  $D$  à savoir

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists (X_1, X_2) \in D^2, \quad \|X_1\| < \epsilon, \quad \|X_2\| < \epsilon \quad \text{et} \quad f(X_1) < f(O) < f(X_2)$$

**Exercice 4.** On considère dans tout cet exercice une fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. On suppose que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  et que toutes ses dérivées partielles sont bornées par  $M \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M\sqrt{n}\|x - y\|$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

2. On suppose que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , que  $f$  est continue en 0 et que toutes ses fonctions dérivées partielles tendent vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0. Montrer que  $f$  est différentiable en 0.
3. On suppose que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et que toutes ses dérivées partielles sont bornées par  $M \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Montrer que  $f$  est continument prolongeable à  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $n \geq 2$ . Dans ce cas,  $f$  est-elle nécessairement différentiable en 0?