Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2012-2013
Enseignants: L. Dumas, J.P. Bartier, E. Echague
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html

TD2 : CALCUL DIFFERENTIEL ET OPTIMISATION

Dans tout le texte, on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est coercive si et seulement si elle est continue et vérifie

$$\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

où la norme de x correspond à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

On note $(.,.)$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$ et pour toute fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\nabla f(x)$ le vecteur gradient de f au point x formé des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

PARTIE 1

1. Soit f une fonction coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que si $||x|| > M$, alors

$$f(x) \geq |f(0)| + 1$$

2. En déduire qu'il existe un élément $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x^*) \leq f(x)$$

On dit alors que x^* est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

3. On suppose en outre que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. En utilisant une formule de Taylor bien choisie, Montrer que

$$\nabla f(x^*) = 0$$

PARTIE 2

Dans cette partie, on considère la fonction g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad g(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$.

4. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (Ax, x) \geq C||x||^2$$

En déduire que g est coercive.

5. Montrer que g est de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et que

$$\nabla g(x) = Ax - b$$

En déduire que g possède un unique minimum global noté x^*.

6. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = u_k - \alpha \nabla g(u_k)$$

où α est un réel positif fixé. Montrer que

$$u_{k+1} - x^* = (I_3 - \alpha A)(u_k - x^*)$$

où I_n désigne la matrice identité de taille n.

7. On note $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer que si $\alpha \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$, alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x^*.