Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2012-2013
Enseignants: L. Dumas, J.P. Bartier, E. Echague
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html`

TD3 : CONVEXITE

Exercice 1 – On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 0\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ ou } y \geq 0\}$,
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 0,\, y \geq x^3\}$,
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \leq 4,\, 3x + 3y + 1 \geq 0\}$,
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \geq 4,\, 3x + 3y + 1 \geq 0\}$.

Représenter graphiquement chacun de ces ensembles et dire s'il est convexe.

Exercice 2 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie doté d'une norme $\|.\|$. Soit A un sous-ensemble fermé non vide de E. Montrer que A est convexe si et seulement si la fonction distance par rapport à A est convexe. On rappelle que cette dernière est définie par

$$\forall \boldsymbol{x} \in E,\ d_A(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{y} \in A} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

et qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Exercice 3 – Soit A une matrice carrée et symétrique de taille $n \times n$. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$

$$f(X) = \frac{1}{2}{}^tXAX + {}^tBX + c,$$

pour tout $X = {}^t(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Ici $B = {}^t(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ (on convient de représenter les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, qui sont à priori des n-uplets, par leur vecteurs coordonnées qui sont des matrices $n \times 1$).

1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit convexe.
2. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit strictement convexe.

Exercice 4 – Etudier la convexité ou la concavité de chacune des fonctions

- $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$.
- $f_2(x, y, z) = x \log x + y \log y + z \log z$.
- $f_3(x, y) = x(x + y^2)$.
- $f_4(x, y) = \log(xy)$.

Exercice 5 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des constantes strictement positives. Étudier la concavité de la fonction

$$f(x_1, ..., x_n) = \min_{1 \le i \le n} \frac{x_i}{\alpha_i}.$$

Exercice 6 – On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ définie par

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} -(x_1 ... x_n)^{1/n} & \text{si } x_1 > 0....x_n > 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convexité de f.