

TD 4 : OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

Exercice 1.

1. Soient u et v deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^2 . On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = \|xu + yv\|$$

Montrer que g est minorée par un réel strictement positif m sur l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

En déduire que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) \geq m\sqrt{x^2 + y^2}$$

2. Soit (p_1, \dots, p_k) une suite de k points de \mathbb{R}^2 avec $k \geq 2$. On pose $p_j = (\alpha_j, \beta_j)$ et on suppose que la suite (α_j) est strictement croissante. On considère alors la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \sum_{j=1}^k (\beta_j - x\alpha_j - y)^2$$

Montrer que f est coercive à savoir: $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$.

En déduire qu'il existe (x_0, y_0) dans \mathbb{R}^2 tel que

$$f(x_0, y_0) = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$$

3. Calculer un tel (x_0, y_0) et montrer qu'il est unique.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2x - 10y$$

1. Montrer que f est coercive sur \mathbb{R}^3 . Que peut-on en déduire?
2. Calculer les points où f est minimale sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 3.

Rechercher les extrema des fonctions suivantes sur \mathbb{R}^2 :

(a) $f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$,

(b) $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(c) $h(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2)$,

(d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4ax - 4by$, a, b fixés.

Exercice 4.

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R}^3 par

$$h(x, y, z) = xyz + yz + xz + xy$$

1. Montrer que le seul point de \mathbb{R}^3 où la matrice hessienne de h est semi-définie positive est le point $(-1, -1, -1)$.
2. Montrer que h ne possède aucun minimum local sur \mathbb{R}^3 .