Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2012-2013
Enseignants: L. Dumas, J.P. Bartier, E. Echague
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html`

TD semaine 6 : OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

Exercice 1. Calculer le cône tangent et le cône normal en chaque point des ensembles suivants:

- $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
- $X_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x + y \leq 3\}$,
- $X_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\}$,
- $X_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$.
- X_6 est la boule unité de $\mathbb{R}^3$
- $X_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$.

Exercice 2. Soit X et Y deux sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{a} \in \overset{\circ}{X} \cap Y$ où $\overset{\circ}{X}$ désigne l'intérieur de X (c'est à dire le plus grand ouvert contenu dans X). Montrer que

$$T_a(X \cap Y) = T_a Y,\ N_a(X \cap Y) = N_a Y. \tag{1}$$

Interpréter ce résultat.

Exercice 3. On cherche à minimiser la fonction $f(x, y) = y^2 - x$ sur l'ensemble $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^3 - y^2 = 0\}$.

1. Montrer que f possède un minimum sur X.
2. Calculer le cône normal à X en tout point de X. En déduire la condition nécessaire d'ordre 1 pour qu'un point (x, y) soit un minimum de f sur X. Conclure.

3. Retrouver le résultat précédent avec une paramétrisation de l'ensemble X.

Exercice 4. On cherche à minimiser la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ sur l'ensemble $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x+y+z = 1\}$.

1. Montrer que f possède un unique minimum sur X.
2. Calculer le cône normal à X en tout point de X. En déduire la condition nécessaire d'ordre 1 pour qu'un point (x,y) soit un minimum de f sur X. Conclure.
3. Retrouver le résultat précédent avec une paramétrisation de l'ensemble X.