Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2012-2013
Enseignants: L. Dumas, J.P. Bartier, E. Echague
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html`

TD 7 : OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE (Cas égalité)

Exercice 1.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Soit $P = \{(x, y, z) \in R^3, \quad ax + by + cz = 1\}$ où $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$.

1. Quelle est la nature de P?
2. Montrer que f possède un unique minimum (x^*, y^*, z^*) sur P.
3. Déterminer (x^*, y^*, z^*) en écrivant les conditions nécessaires d'optimalité d'ordre 1.

Exercice 2.

On cherche à minimiser la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ sous la contrainte $ax + by = 1$ où (a, b) est un couple de réels non nuls.

1. Représenter graphiquement le problème d'optimisation (lignes de niveaux de f et domaine de définition)
2. Les contraintes sont-elles qualifiées?
3. Ecrire la condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1 et déterminer la nature des extremas.
4. Retrouver les résultats précédents avec une paramétrisation de la droite D.

Exercice 3. (examen 2012)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1$$

1. Montrer que f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^3$ et le déterminer.
2. Déterminer le minimum de f sur

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 1\}$$

On pourra remarquer (et le démontrer) que f et D_1 sont convexes.

Exercice 4. (examen 2011)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2x - 10y$$

1. Montrer que f est coercive sur $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire?
2. Calculer les points où f est minimale sur $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z^2 = 0\}$. A est-il fermé? borné? Montrer sans calcul que f possède au moins un minimum sur A.
4. Calculer les points où f est minimale sur A.

Exercice 5.

1. Rechercher les rectangles d'aire maximale dans une ellipse.
2. Rechercher les triangles d'aire maximale à périmètre donné.