Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2012-2013
Enseignants : L. Dumas, J.P. Bartier, E. Echague
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651`

TD 8 et 9 : OPTIMISATION : révisions et cas inégalité

Exercice 1. (*examen CC 2012*)

On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 1 + x^2 + y^3 \\ f_2(x,y) = xy \\ f_3(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x^4 \end{cases}$$

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique pour f_1, f_2 et f_3.
2. Quelles sont les fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$ parmi f_1, f_2 et f_3 ?
3. Pour quelles fonctions $(0,0)$ est-il un minimum local ?
4. Pour quelles fonctions $(0,0)$ est-il un minimum global ?

Exercice 2.(*session 2, 2011*)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + x.$$

1. Montrer que f n'est pas coercive sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$. f admet-elle des extrema locaux ?
3. Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = \frac{1}{2}(x+y)\}$. A est-il fermé ? borné ?
4. Déterminer les points critiques de la restriction de f à A de deux manières : en utilisant d'une part les multiplicateurs de lagrange, et d'autre part en remplaçant z par sa valeur dans l'expression de f.
5. Calculer les points où f est minimale sur A.

Exercice 3. Résoudre les problèmes d'optimisation avec contraintes égalité suivants :

(a) Extremum de $(x^2 + y^2)$ sous la contrainte $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$,
(b) $\max(x^2 + xy + y^2 + yz + z^2)$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exercice 4. Résoudre graphiquement les problèmes suivants :

(a) $\min(x + y)$ sous les contraintes $x \geq 0,\ y \geq 0,\ -2x + y \leq 2,\ 3x \leq 10,\ 2x - y \leq 5$,
(b) $\min(x + y)$ sous les contraintes $yx^2 - 2x \leq 0,\ y \geq 5 - x$.

Exercice 5 (*examen 2010*) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2.$$

1) Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2) On considère les trois problèmes d'optimisation suivants :

$$(\mathcal{P}_i) \qquad \min_{(x,y)\in K_i} f(x,y), \quad i \in \{1,2,3\}$$

où $K_1 = \mathbb{R}^3$, $K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 10\}$ et $K_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + \frac{1}{3}y^2 \leq 1\}$.

a) Expliquer pourquoi chaque problème $(\mathcal{P}_i)$ admet une unique solution.

b) Résoudre $(\mathcal{P}_1)$ puis $(\mathcal{P}_2)$.

c) Résoudre le problème $(\mathcal{P}_3)$.

Exercice 6 (*examen 2010*) on considère le problème d'optimisation :

$$(**) \qquad \min_{x+y\leq 1} 7x^2 + 2y^2 + 7xy + 7x.$$

1) Montrer que $(**)$ est un problème convexe.

2) Montrer que $(**)$ admet une unique solution notée (a,b).

3) Ecrire les conditions (KKT) et trouver (a,b).

Exercice 7 (*examen 2011*) On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,y) = x^2 + y^2 + xy$$

On note

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } x+y \geq 1\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D.
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur D.

Exercice 8 (*rattrapage 2011*)

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2,$$

où a et b sont deux réels On note

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 2\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D.
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur D.

Exercice 9 (*rattrapage 2011*)

Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x,y) := x^2+\alpha y^2+xy+x$ pour un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche à minimiser f_α sur

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y \leq 1\}$$

a) Pour quelles valeurs de α f_α est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? Résoudre le problème posé dans ce cas.

b) Lorsque f_α n'est pas convexe, f_α possède-t-elle un minimum sur C ?

Exercice 10. Résoudre les problèmes d'optimisation avec contraintes inégalités suivants :

(a) $\min(3x+5y+6z)$ sous les contraintes $x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0,\ x+2y+z \geq 4,\ x+2y+2z \geq 6$,

(b) $\max(x+y)$ sous les contraintes $y \leq 0,\ y \geq x^3$,

(c) $\max(x+2xy+2y-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2})$ sous les contraintes $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1$,

(d) $\min(x^3+y^2)$ sous les contraintes $x^2+y^2 \leq \frac{25}{16}), 2x+y+\frac{5}{4} \geq 0$.