Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2012-2013
Enseignants : L. Dumas, J.P. Bartier, E. Echague
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html

EXAMEN, 15 MAI 2013
2heures, pas de documents

Exercice 1.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sin(||x||^2) = \sin(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

1. Montrer que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer son gradient.

2. Montrer que la fonction f est C^2 et calculer sa matrice Hessienne.

3. Déterminer tous les extrema (minima et maxima) de f sur $\mathbb{R}^n$. Représenter graphiquement ces extrema dans le cas où $n = 2$.

Exercice 2.

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

1. Montrer que la fonction g est coercive.

2. Montrer que la fonction g est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

3. En déduire que g possède un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$ et le déterminer.

4. Déterminer le minimum de g sur $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x + y = 3\}$.

5. Soit l'ensemble $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } x + y \geq 2\}$. Montrer que X_2 est convexe et compact. Déterminer le minimum et le maximum de g sur X_2.

Exercice 3.

1. Résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ x_1 + x_3 \leq 2, \end{array}$$

2. Proposez une situation en économie pouvant conduire à la résolution de ce problème.