Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2012-2013
Enseignants : L. Dumas, J.P. Bartier, E. Echague
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html`

EXAMEN, 15 MAI 2013, CORRECTION
2heures, pas de documents

Exercice 1.

1. (*1 pts*) La fonction est différentiable et même C^1 par les théorèmes généraux (somme, produit, composition) de fonction C^1. On calcule son gradient via ses dérivées partielles :

$$\nabla f(x) = (2x_1 \cos(A), ..., 2x_n \cos(A))$$

en notant $A = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

2. (*2 pts*) La fonction est C^2 par les théorèmes généraux (somme, produit, composition) de fonction C^2. On calcule sa matrice hessienne $H(f)(x) = [h_{i,j}]$ via ses dérivées partielles secondes :

$$h_{i,i} = 2\cos(A) - 4x_i^2 \sin(A) \quad (1 \leq i \leq n)$$

et

$$h_{i,j} = -4x_i x_j \sin(A) \quad (i \neq j)$$

3. (*2 pts*) On calcule les points critiques : on a $\nabla f(x) = 0$ si et seulement si

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad 2x_i \cos(A) = 0$$

Il y a donc le point $x = (0, ..., 0)$ et tous les points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $A = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$). Réciproquement, tous ces points sont des extrema : en effet, au point $(0, ..., 0)$ la hessienne vaut $2I$ et est donc définie positive (CS2 : il s'agit d'un minimum local) et aux points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $A = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f(x) = (-1)^k$ (minimum si k impair et maximum si k pair). Graphiquement, si $n = 2$, les minima sont situés en 0 en sur des cercles de rayon $\frac{\pi}{2} + 2p\pi$ et les maxima sur des cercles de rayon $\frac{\pi}{2} + (2p+1)\pi$ (où p décrit $\mathbb{N}$).

Exercice 2.

1. (*2 pts*)
   On a
   $$g(x,y) = (\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}||(x,y)||^2$$
   et la fonction est donc coercive.
2. (*1 pts*) La matrice hessienne de g en tout point $x \in \mathbb{R}^2$ est égal à $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est définie positve (par le critère de Sylvester par exemple) et donc g est strictement convexe.
3. (*2 pts*) g est continue et coercive donc possède au moins un minimum sur $\mathbb{R}^2$. De plus, g est strictement convexe donc ce minimum est unique (1 pt). Ce minimum est à rechercher parmi les points critiques : ceux ci sont tels que
   $$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$
   soit $x = y = 0$. Il s'agit donc du minimum de g.
4. (*2 pts*) On peut remarquer que g est convexe et que les contraintes sont affines. Il s'agit donc d'un problème convexe. Dans ce cas, la qualification des contraintes est assurée et il n'est pas nécessaire de faire une réciproque au système KKT (les points trouvés sont des minima globaux). Celui-ci s'écrit ici :
   $$\begin{cases} 2x + y - \lambda = 0 \\ 2y + x - \lambda = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$
   L'unique solution de ce système linéaire de taille 3 est $x = y = \frac{3}{2}$ et $\lambda = \frac{9}{2}$. Le minimum global de g sur X_1 est donc le point $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.
5. (*4 pts*) L'ensemble X_2 est convexe par intersection de deux ensembles convexes (un disque et un demi-plan). Il est par ailleurs fermé (inégalités larges) et borné (inclus dans un disque) donc compact (1pt). X_2 a la forme d'une lunule.
   (i) *Recherche du minimum de g sur X_2* : le problème est convexe (g est convexe et les fonctions définissant les contraintes inégalités aussi : $c_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ et $c_2(x,y) = -x - y + 2$). Il n'est pas nécessaire de traiter la qualification ni de faire de réciproque au système KKT. De plus la solution de ce système existera et sera unique (pour le minimum) car g est strictement convexe et X_2 est convexe. Le système s'écrit ici :
   $$\begin{cases} 2x + y + 2x\lambda - \mu = 0 \\ 2y + x + 2y\lambda - \mu = 0 \\ \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0 \\ \mu(-x - y + 2) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0 \\ \boldsymbol{x}^2 + y^2 \leq 4 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

(a) 1er cas : $\lambda = \mu = 0$: l'unique solution $(0,0)$ n'est pas dans le domaine admissible.

(b) 2eme cas : $\lambda = 0$ et $\mu > 0$: on trouve $x = y = 1$ et $\mu = 3$. Cette solution convient et c'est donc la seule : le minimum de g sur X_2 est atteint en $(1,1)$ et vaut 3.

(i) *Recherche du maximum de g sur X_2* : cette fois, on s'intéresse à la minimisation de $-g$ et le système n'est donc plus convexe. Comme X_2 est compact, il y aura au moins une solution au problème (pas forcément unique par contre). Le système KKT s'écrit à présent :

$$\begin{cases} -2x - y + 2x\lambda - \mu = 0 \\ -2y - x + 2y\lambda - \mu = 0 \\ \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0 \\ \mu(-x - y + 2) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0 \\ \boldsymbol{x}^2 + y^2 \leq 4 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

(a) 1er cas : $\lambda = \mu = 0$: l'unique solution $(0,0)$ n'est pas dans le domaine admissible.

(b) 2eme cas : $\lambda = 0$ et $\mu > 0$: on trouve $x = y = 1$ et $\mu = -3$. Cette solution ne convient pas.

(c) 3eme cas $\lambda > 0$ et $\mu = 0$: on étudie le système non linéaire :

$$\begin{cases} -2x - y + 2x\lambda = 0 \\ -2y - x + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

On en déduit $(x - y)(-1 + 2\lambda) = 0$. Deux cas sont possibles : si $\lambda = \frac{1}{2}$, on trouve $x = -y = \pm\sqrt{2}$ et aucune solution n'est dans le domaine. Dans le 2ème cas, $x = y = \pm\sqrt{2}$ et on trouve comme solution $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 0)$. En ce point g vaut 6. De plus, la contrainte active est qualifiée en ce point car son gradient vaut $(-1,-1) \neq 0$.

(d) 3eme cas $\lambda > 0$ et $\mu > 0$: cela correspond aux deux points $(2,0)$ et $(0,2)$. En ces deux points g vaut 4. Ce ne peut être un point de maximum de g sur X_2.

Le maximum de g sur X_2 est donc uniquement atteint en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Exercice 3.

(*6 pts*) Avec la méthode du simplexe, on obtient successivement les résultats suivants :

Etape 1 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	θ
x_4	1	4	2	1	0	10	$\frac{5}{2}$
x_5	1	0	1	0	1	2	$+\infty$
	1	2	1	0	0	0	

Etape 2 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	θ
x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$	10
x_5	1	0	1	0	1	2	2
	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-5	

Etape 3 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	θ
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	2	
x_1	1	0	1	0	1	2	
	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-6	

Le maximum de f est donc atteint au point $(x, y, z) = (2, 2, 0)$ et vaut 6.

En économie, cela peut correspondre à l'optimisation du gain de fabrication de 3 produits, ayant des marges unitaires respectives de 1,2 et 1 euros. Ces produits nécessitent 2 matières premières en quantité respective 1,4,1 (kg par exemple) pour la matière 1, et 1,0,1 pour la matière 2. Ces deux matières premières ont un stock respectif de 10kg et 2kg.