Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2011-2012
Enseignants : L. Dumas, M.Z. Dauhoo, J.P. Bartier
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html`

EXAMEN, 22 MAI 2012
2heures, pas de documents

Exercice 1.

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

où $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive.

1. Montrer que g est coercive.

2. Montrer que g possède un unique minimum global noté x^*.

3. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = u_k - \alpha \nabla g(u_k)$$

où α est un réel positif fixé. Montrer que

$$u_{k+1} - x^* = (I_3 - \alpha A)(u_k - x^*)$$

où I_n désigne la matrice identité de taille n.

4. On note L la plus grande valeur propre de A. Montrer que si $\alpha \in]0, \frac{2}{L}[$, alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x^*.

Exercice 2.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1$$

1. Montrer que f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$ et le déterminer.

2. Déterminer le minimum de f sur

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 1\}$$

On pourra remarquer (et le démontrer) que f et D_1 sont convexes.

3. Soit $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x+y+z = 1 \text{ et } x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. Montrer que D_2 est compact et déterminer le minimum et le maximum de f sur D_2.

Exercice 3.

Utiliser la méthode du simplexe pour rechercher le maximum de la fonction

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + z$$

sur le domaine :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ x + 2y \leq 4 \text{ et } 2x + z \leq 5\}$$

.