Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2011-2012
Enseignants : L. Dumas, M.Z. Dauhoo, J.P. Bartier
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651.html`

EXAMEN, 22 MAI 2012, CORRECTION
2heures, pas de documents

Exercice 1.

1. (*2 pts*) Tout d'abord, comme A est symétrique, définie positive, en notant $\lambda_1 > 0$ sa plus petite valeur propre, on peut montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad < Ax, x > \geq \lambda_1 ||x||^2$$

D'autre part, par l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad < b, x > \leq ||x|| \cdot ||b||$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) \geq \lambda_1 ||x||^2 - ||x|| \cdot ||b||$$

et ainsi

$$\lim_{||x|| \to +\infty} g(x) = +\infty$$

Comme g est de plus continue, g est coercive.

2. (*2 pts*) Avec le résultat précédent, on sait déjà que g possède au moins un minimum. Celui-ci est unique en remarquant :
(i) soit que g est strictement convexe en calculant sa hessienne $Hg(x) = A$ et en remarquant que celle-ci est toujours définie positive.
(ii) soit en calculant $\nabla g(x) = Ax - b$ et en remarquant que g ne possède qu'un seul point critique, $x^* = A^{-1}b$.

3. (*1 pts*) On calcule

$$u_{k+1} - x^* = u_k - \alpha(Ax_k - b) - x^* = u_k - \alpha A u_k + \alpha b - x^*$$

et

$$(I_n - \alpha A)(u_k - x^*) = u_k - x^* - \alpha A u_k + \alpha A x^* = u_k - x^* - \alpha A x_k + \alpha b$$

4. (*2 pts*) En notant $0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n$ les valeurs propres de A, les valeurs propres de $I_n - \alpha A$ sont donc égales à $\mu_i = 1 - \alpha\lambda_i$. Lorsque $\alpha \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$, ces valeurs propres sont strictement plus petites que 1 et donc $\rho(I_n - \alpha A) < 1$. On en déduit facilement que la suite $||x_k - x^*||$ converge vers 0.

Exercice 2.

1. (*2 pts*) On calcule les points critiques de f : on doit résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} f(x, y, z) = 2x - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} f(x, y, z) = 2y - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} f(x, y, z) = 2z = 0 \end{cases}$$

   soit $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. En ce point, la hessienne de f vaut $Hf(x) = 2I_3$. Comme celle-ci est définie positive, il s'agit donc d'un minimum (CS1 sans contrainte).

   N.B. : on pouvait aussi justifier le fait que le point critique est l'unique minimum en prouvant que f est coercive (de la même manière que dans l'exercice 1) et strictement convexe.

2. (*3 pts*) f est (strictement) convexe car sa hessienne égale à $2I_3$ est définie positive pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. De plus, D_1 est convexe car il s'agit d'un plan affine. La (CN1) devient donc une (CNS1) et aucune condition de qualification n'est requise. Les points critiques sont à présent solutions du système :

$$\begin{cases} 2x - 2 + \lambda = 0 \\ 2y - 2 + \lambda = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

   où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte égalité. On trouve l'unique solution $(x, y, z, \lambda) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Le point $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ est donc l'unique minimum de f sur D_1.

3. (*5 pts*) D_2 est l'intersection d'un cylindre d'axe $0z$ et de rayon $\frac{1}{2}$ et d'un plan non parallèle à son axe. Il s'agit donc d'une ellipse. En particulier D_2 est fermé et borné (on remarque tout d'abord que $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $|y| \leq \frac{1}{2}$ ce qui implique ensuite que $|z| \leq 2$). f atteint donc son minimum et son maximum sur D_2. Pour les déterminer, on écrit les (CN1) avec contraintes égalité et inégalité (aussi appelées conditions KKT). Sous réserve de qualification, en ces points, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} 2x - 2 + \lambda + 2x\mu = 0 \\ 2y - 2 + \lambda + 2y\mu = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 \leq \dfrac{1}{4} \\ \mu(x^2 + y^2 - \dfrac{1}{4}) = 0 \end{cases}$$

   avec $\mu \geq 0$ (respectivement ≤ 0) si (x, y, z) est un minimum (respectivement maximum).

   Si $\mu = 0$, on est ramené au système précédent qui possède l'unique solution $(x, y, z, \lambda) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Cette solution ne vérifie pas $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.

   En soustrayant les deux première égalités, on trouve $(x-y)(1+\mu) = 0$. On considère donc les deux cas suivants :

(i) si $\mu \neq -1$, on a $x = y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Dans le premier cas, on trouve $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ puis $\lambda = \sqrt{2} - 2$ et $\mu = -1 + \frac{2-\lambda}{2x} = 4\sqrt{2} - 1$. Dans le second cas, on trouve $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ puis $\lambda = -\sqrt{2} - 2$ et $\mu = -4\sqrt{2} - 3$.
(ii) si $\mu = -1$, on trouve successivement $\lambda = 2$, $z = -1$ puis $x+y = 2$ et $x^2+y^2 = \frac{1}{4}$ implique que $2x^2 - 4x + \frac{15}{4} = 0$. Cette équation n'a pas de solution car $\Delta < 0$.
En résumé, le minimum de f est atteint en $(x, y, z) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ et le maximum de f est atteint en $(x, y, z) = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$. On remarque en particulier qu'en ces points, les contraintes sont qualifiées car les vecteurs $(2x, 2y, 0)$ et $(1, 1, 1)$ forment une famille libre.

Exercice 3.

(*5 pts*) Avec la méthode du simplexe, on obtient successivement les résultats suivants :

Etape 1 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	θ
x_4	1	2	0	1	0	4	2
x_5	2	0	1	0	0	5	$+\infty$
	2	3	1	0	0	0	

Etape 2 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	θ
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	2	$+\infty$
x_5	2	0	1	0	1	5	5
	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	-6	

Etape 3 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S	θ
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	2	
x_3	2	0	1	0	1	5	
	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	-11	

Le maximum de f est donc atteint au point $(x, y, z) = (0, 2, 5)$ et vaut 11.