UVSQ

LSMA651,

Programmation linéaire, algorithme du simplexe.

Rappel des notations, hypothèses et définitions.

A matrice $M \times N$ avec $M < N$, $\mathrm{rg}(A) = M$.

B matrice colonne $M \times 1$.

C matrice ligne $1 \times N$.

Rappel des notations, hypothèses et définitions.

A matrice $M \times N$ avec $M < N$, $\mathrm{rg}(A) = M$.

B matrice colonne $M \times 1$.

C matrice ligne $1 \times N$.

Ensemble des contraintes

$$\Sigma := \{X \in \mathbb{R}^N,\ X \geq 0,\ AX = B\}$$

où pour $X = {}^t(x_1, \ldots, x_N)$,

$$X \geq 0 \iff \forall i \in \{1, \ldots, N\},\ x_i \geq 0.$$

Rappel des notations, hypothèses et définitions.

Définition. *Soit* $\widehat{X} \in \Sigma := \{X \in \mathbb{R}^N, X \geq 0, AX = B\}$. *On dit que* $\widehat{X}$ *est un sommet ou point extrémal de* Σ, *si* $\forall (X_0, X_1) \in \Sigma$

$$\hat{X} = \lambda X_0 + (1-\lambda) X_1,\ \lambda \in]0,1[\Rightarrow \hat{X} = X_0 = X_1.$$

Rappel des notations, hypothèses et définitions.

Définition. *Soit* $\widehat{X} \in \Sigma := \{X \in \mathbb{R}^N,\ X \geq 0,\ AX = B\}$. *On dit que* $\widehat{X}$ *est un sommet ou point extrémal de* Σ, *si* $\forall (X_0, X_1) \in \Sigma$

$$\hat{X} = \lambda X_0 + (1-\lambda) X_1,\ \lambda \in]0,1[\Rightarrow \hat{X} = X_0 = X_1.$$

On s'intéresse à

$$(P.L) \qquad \min_{X \in \Sigma} CX$$

Mise en oeuvre 1.

Elle est fondée sur l'observation dans des cas simples, que si **(P.L)** admet une solution, alors un point extremal de Σ est solution. Ce résultat se généralise et on a

Mise en oeuvre 1.

Elle est fondée sur l'observation dans des cas simples, que si **(P.L)** admet une solution, alors un point extremal de Σ est solution. Ce résultat se généralise et on a

Théorème. *Si* **(P.L)** *a une solution, alors un point extrémal de* Σ *est solution.*

Mise en oeuvre 1.

Elle est fondée sur l'observation dans des cas simples, que si **(P.L)** admet une solution, alors un point extremal de Σ est solution. Ce résultat se généralise et on a

Théorème. *Si* **(P.L)** *a une solution, alors un point extrémal de* Σ *est solution.*

Dantzig propose alors une méthode pour parcourir les sommets de Σ.

Mise en oeuvre 1.

Elle est fondée sur l'observation dans des cas simples, que si **(P.L)** admet une solution, alors un point extremal de Σ est solution. Ce résultat se généralise et on a

Théorème. *Si* **(P.L)** *a une solution, alors un point extrémal de* Σ *est solution.*

Dantzig propose alors une méthode pour parcourir les sommets de Σ.

Il faut d'abord caractériser les points extremaux de Σ.

Description des points extremaux de Σ.

On rappelle que $\Sigma := \{X \in \mathbb{R}^N,\ X \geq 0,\ AX = B\}$.

Description des points extremaux de Σ.

On rappelle que $\Sigma := \{X \in \mathbb{R}^N,\ X \geq 0,\ AX = B\}$.

Soit $\hat{X} \in \Sigma$, $\hat{X} = {}^t(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_N)$, ses coordonnées. On note A_i, $i = 1, ..., N$ les colonnes de A. On dispose alors du résultat suivant:

Description des points extremaux de Σ.

On rappelle que $\Sigma := \{X \in \mathbb{R}^N,\ X \geq 0,\ AX = B\}$.

Soit $\hat{X} \in \Sigma$, $\hat{X} = {}^t(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_N)$, ses coordonnées. On note A_i, $i = 1, ..., N$ les colonnes de A. On dispose alors du résultat suivant:

Théorème. *$\hat{X} \neq 0$ est un point extremal de Σ si et seulement il existe $I \subset \{1, ..., N\}$ tel que*

i. $card(I) = M$,

ii. $\{A_i,\ i \in I\}$ *est de rang* M,

iii. $\forall j \notin I,\ \hat{x}_j = 0$.

Remarque: l'ensemble I **dépend** de $\hat{X}$.

Description des points extremaux de Σ.

Exemple: considérons le cas suivant où

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \ AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Description des points extremaux de Σ.

Exemple: considérons le cas suivant où

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \, x_1, x_2, x_3 \geq 0, \, AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le point $\hat{X}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point extremal de Σ, car ......

tandis que le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$ ne l'est pas car.....

Mise en oeuvre 2.

On part d'un point extremal de Σ, $\hat{X}$. Quitte à faire un changement de notations, on peut supposer qu'on peut prendre pour ensemble I l'ensemble$I = \{1, ..., M\} \subset \{1, ..., N\}$.

Mise en oeuvre 2.

On part d'un point extremal de Σ, $\hat{X}$. Quitte à faire un changement de notations, on peut supposer qu'on peut prendre pour ensemble I l'ensemble$I = \{1, ..., M\} \subset \{1, ..., N\}$.

Donc les M premières colonnes de A forment une matrice carrée de rang M, donc inversible.

Mise en oeuvre 2.

On part d'un point extremal de Σ, $\hat{X}$. Quitte à faire un changement de notations, on peut supposer qu'on peut prendre pour ensemble I l'ensemble$I = \{1, ..., M\} \subset \{1, ..., N\}$.

Donc les M premières colonnes de A forment une matrice carrée de rang M, donc inversible.

On note A_I cette matrice et A'_I la matrice formée avec les autres colonnes. $\hat{X}_I$ le vecteur de $\mathbb{R}^M$ dont les coordonnées sont les M premières coordonnées de $\hat{X}$. On a donc

$$A_I \hat{X}_I = B.$$

Mise en oeuvre 2.

On part d'un point extremal de Σ, $\hat{X}$. Quitte à faire un changement de notations, on peut supposer qu'on peut prendre pour ensemble I l'ensemble$I = \{1,...,M\} \subset \{1,...,N\}$.

Donc les M premières colonnes de A forment une matrice carrée de rang M, donc inversible.

On note A_I cette matrice et A_I' la matrice formée avec les autres colonnes. $\hat{X}_I$ le vecteur de $\mathbb{R}^M$ dont les coordonnées sont les M premières coordonnées de $\hat{X}$. On a donc

$$A_I\hat{X}_I = B.$$

Sur $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et le sommet $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $I = \{1,2\}$, $A_I := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mise en oeuvre 2.

Puisque A_I est inversible si X est un élément de Σ alors

$$A_I X_I + A'_I X'_I = B = A_I \hat{X}_I.$$

Mise en oeuvre 2.

Puisque A_I est inversible si X est un élément de Σ alors

$$A_I X_I + A_I' X_I' = B = A_I \hat{X}_I.$$

Ce qui conduit à

$$X_I + A_I^{-1} A_I' X_I' = \hat{X}_I.$$

Mise en oeuvre 2.

Puisque A_I est inversible si X est un élément de Σ alors

$$A_I X_I + A_I' X_I' = B = A_I \hat{X}_I.$$

Ce qui conduit à

$$X_I + A_I^{-1} A_I' X_I' = \hat{X}_I.$$

Il s'ensuit que $\hat{X}$ est un sommet de

$$\Sigma' := \{X = \begin{pmatrix} X_I \\ X_I' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N,\ X_I + A_I^{-1} A_I' X_I' = A_I^{-1} B =: B'\},$$

puisque l'on sait que $B'(= \hat{X}_i) \geq 0$;

et réciproquement si $B'(= \hat{X}_i) \geq 0$, un sommet de Σ' donne lieu à un sommet de Σ.

Mise en oeuvre 2.

Puisqu'on peut exprimer X_I en fonction de X_I' et $\hat{X}_I$, la quantitié à minimiser qui s'écrit

$$CX,$$

peut sécrire en utilisant $C = (C_I, C_I')$

$$CX = C_I X_I + C_I' X_I'$$

dans laquelle on reporte $X_I + A_I^{-1} A_I' X_I' = A_I^{-1} B =: B'$,

Mise en oeuvre 2.

Puisqu'on peut exprimer X_I en fonction de X'_I et $\hat{X}_I$, la quantitié à minimiser qui s'écrit

$$CX,$$

peut sécrire en utilisant $C = (C_I, C'_I)$

$$CX = C_I X_I + C'_I X'_I$$

dans laquelle on reporte $X_I + A_I^{-1} A'_I X'_I = A_I^{-1} B =: B',$ ce qui donne

$$CX = C_I(B') + C'_I A_I^{-1} A'_I X'_I.$$

.

Mise en oeuvre 3.

On voit donc sur la formule

$$CX = C_I(B') + C_I' A_I^{-1} A_I' X_I',$$

que pour diminuer la valeur du coût, on doit prendre un $X_I' \geq 0$ non nul, de façon à avoir

$$C_I' A_I^{-1} A_I' X_I' < 0.$$

Mise en oeuvre 3.

On voit donc sur la formule

$$CX = C_I(B') + C_I' A_I^{-1} A_I' X_I',$$

que pour diminuer la valeur du coût, on doit prendre un $X_I' \geq 0$ non nul, de façon à avoir

$$C_I' A_I^{-1} A_I' X_I' < 0.$$

On va choisir un $j \notin I$ et trouver un sommet $\check{X} = {}^t(\check{x}_1, ..., \check{x}_N)$ tel que $I(\check{X})$ et $I(\hat{X})$ diffère seulement de j.

Mise en oeuvre 3.

On prend donc $j \notin I$, et A_j la $j$ème colonne de A. Posons $\check{x}_j = \theta$, où θ est choisi de la façon suivante: On écrit $A_j = A_I \Gamma_{Ij}$, où Γ_{Ij} est un vecteur à M coordonnées. On a donc

$$X_I + \theta \Gamma_{Ij} = \hat{X}_I.$$

On voit que l'on sera encore dans Σ si l'on prend

$$\theta := \min\{\frac{\hat{x}_i}{\gamma_{ij}}, \gamma_{ij} > 0\}.$$

Mise en oeuvre 3.

On prend donc $j \notin I$, et A_j la $j$ème colonne de A. Posons $\check{x}_j = \theta$, où θ est choisi de la façon suivante: On écrit $A_j = A_I \Gamma_{Ij}$, où Γ_{Ij} est un vecteur à M coordonnées. On a donc

$$X_I + \theta \Gamma_{Ij} = \hat{X}_I.$$

On voit que l'on sera encore dans Σ si l'on prend

$$\theta := \min\{\frac{\hat{x}_i}{\gamma_{ij}}, \gamma_{ij} > 0\}.$$

Ce θ étant choisi, on a intérêt à choisir $j \notin I$ de façon à avoir le coefficient c_j dans C le plus petit possible (et non nul).

Exemple

Soit à minimiser la quantité $-100x_1 - 200x_2 - 50x_3$ sous les contraintes

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$5x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 1000,$$
$$10x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 2000,$$
$$10x_1 + 5x_2 \leq 500.$$

Exemple

Soit à minimiser la quantité $-100x_1 - 200x_2 - 50x_3$ sous les contraintes

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$5x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 1000,$$
$$10x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 2000,$$
$$10x_1 + 5x_2 \leq 500.$$

On introduit les variables $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, dites d'écart pour transformer les contraintes en

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,$$
$$5x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 = 1000,$$
$$10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_5 = 2000,$$
$$10x_1 + 5x_2 + x_6 = 500,$$

et le point de coordonnées $(0, 0, 0, 1000, 2000, 500)$ est clairement un sommet de l'ensemble contrainte.

Exemple

On introduit les variables $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, dites d'écart pour transformer les contraintes en

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,$$
$$5x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 = 1000,$$
$$10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_5 = 2000,$$
$$10x_1 + 5x_2 + x_6 = 500,$$

et le point de coordonnées $(0, 0, 0, 1000, 2000, 500)$ est clairement un sommet de l'ensemble contrainte.

On voit, *a priori*, qu'on minisera le plus le coût en augmentant le plus possible x_2, on va donc chercher un nouveau sommet avec $\check{x}_2 > 0$ et $\check{x}_1 = \check{x}_3 = 0$.

Exemple

On voit, *a priori*, qu'on minisera le plus le coût en augmentant le plus possible x_2, on va donc chercher un nouveau sommet avec $\check{x}_2 > 0$ et $\check{x}_1 = \check{x}_3 = 0$.

On est donc amené à résoudre

$$
\begin{aligned}
5\check{x}_2 + \check{x}_4 &= 1000,\\
8\check{x}_2 + \check{x}_5 &= 2000,\\
5\check{x}_2 + \check{x}_6 &= 500,
\end{aligned}
$$

tout en respectant la positivité et en prenant $\check{x}_2$ le plus grand possible, ce qui donne $\check{x}_2 = 100$, $\check{x}_6 = 0$, $\check{x}_5 = 1200$ et $\check{x}_4 = 500$.

Exemple

Pour s'assurer qu'on a bien un sommet, on voit facilement que les colonnes 2, 4 et 5 du système des contraintes, sont linéairement indépendantes.

Exemple

Pour s'assurer qu'on a bien un sommet, on voit facilement que les colonnes 2, 4 et 5 du système des contraintes, sont linéairement indépendantes.

On exprime les variables x_2, x_4, x_5 en fonction des autres (en les laissant dans le premier membre):

$$x_2 + 2x_1 + \frac{x_6}{5} = 100$$

$$x_5{=}2000{-}10x_1{-}8x_2{-}5x_3{=}2000{-}10x_1{-}800{+}16x_1{-}\frac{8x_6}{5}{-}5x_3,$$

$$x_5 - 6x_1 + 5x_3 + \frac{8x_6}{5} = 1200$$

$$x_4{+}5x_1{+}5(100{-}2x_1{-}\frac{x_6}{5}){+}10x_3{=}1000$$

$$x_4 - 5x_1 + 10x_3 - x_6 = 500$$

et on veut minimiser

$$300x_1 - 50x_3 + 40x_6 - 20000$$

Exemple

On voit dans le coût $300x_1 - 50x_3 + 40x_6 - 20000$ que c'est en prenant x_3 non nul que l'on va le diminuer. On va donc passer de $\check{X}$ à $\tilde{X}$ de la façon suivante, en autorisant $\tilde{x}_3$ à être non nul et en gardant $\tilde{x}_1$ $\tilde{x}_6$ nuls, ce qui donne

Exemple

$$\tilde{x}_5 - 5\tilde{x}_3 = 1200,$$
$$\tilde{x}_4 + 10\tilde{x}_3 = 500,$$

c'est à dire $\tilde{x}_3 = 50$, $\tilde{x}_5 = 1450$, et $\tilde{x}_2 = 100$.

On exprime alors $x_{3,2,5}$ en fonction de $x_{1,4,6}$ et la fonction coût en fonction de ceux-ci, ce qui donne

$$x_3 - 0.5x_1 + 0.1x_4 - 0.1x_6 = 50$$
$$x_5 - 3.5x_1 - 0.5x_4 - 1.1x_6 = 950$$
$$x_2 + 2x_1 + 0.2x_6 = 100$$

et un coût égal à

$$275x_1 + 5x_4 + 35x_6 - 22500,$$

ce qui montre qu'on ne peut plus diminuer le coût et que la valeur minimale de celui-ci est -22500.

Etude des possibilités

Reprenons l'équation

$$X_I + \theta\Gamma_{Ij} = \hat{X}_I,$$

dont on espère qu'elle permet de passer du sommet $\hat{X}_I$ à un autre.

Etude des possibilités

Reprenons l'équation
$$X_I + \theta\Gamma_{Ij} = \hat{X}_I,$$
dont on espère qu'elle permet de passer du sommet $\hat{X}_I$ à un autre.

- Si l'on peut choisir n'importe quel $\theta > 0$, c'est à dire si Γ_{Ij} a toutes ses coordonnées ≤ 0, et si le coefficient c_j est < 0, le coût n'est pas minorée.

Etude des possibilités

Reprenons l'équation
$$X_I + \theta\Gamma_{Ij} = \hat{X}_I,$$
dont on espère qu'elle permet de passer du sommet $\hat{X}_I$ à un autre.

- Si l'on peut choisir n'importe quel $\theta > 0$, c'est à dire si Γ_{Ij} a toutes ses coordonnées ≤ 0, et si le coefficient c_j est < 0, le coût n'est pas minorée.

- Si au bout d'un certain nombre d'itération les coefficients du coût sont tous ≥ 0, on ne peut plus le minorer et on a une solution.

Etude des possibilités

Reprenons l'équation

$$X_I + \theta\Gamma_{Ij} = \hat{X}_I,$$

dont on espère qu'elle permet de passer du sommet $\hat{X}_I$ à un autre.

- Si l'on peut choisir n'importe quel $\theta > 0$, c'est à dire si Γ_{Ij} a toutes ses coordonnées ≤ 0, et si le coefficient c_j est < 0, le coût n'est pas minorée.
- Si au bout d'un certain nombre d'itération les coefficients du coût sont tous ≥ 0, on ne peut plus le minorer et on a une solution.
- Si un coefficient c_j, $j \notin I$ du coût est < 0, et si le vecteur Γ_{Ij} a un coefficient > 0, on peut encore minorer le coût.

Utilisation des tableaux

On a vu dans les exemples, qu'il fallait exprimer certaines coordonnées (celles dont les indices correspondent au sommet que l'on traite) en fonction des autres, ce qui s'apparente à une méthode du pivot de Gauss.

Utilisation des tableaux

Pour ce faire, il faut avoir trouvé une point extrémal. On construit un tableau à $M + 2$ lignes et $N + 3$ colonnes:

Utilisation des tableaux

Pour ce faire, il faut avoir trouvé une point extrémal. On construit un tableau à $M + 2$ lignes et $N + 3$ colonnes:

Dans la 1ère colonne, à partir du 2ème coeff, on écrit "x_i" pour $i \in I$ (I est l'ensemble des indices associés au sommet choisi.

Dans la 1ère ligne, à partir du 2ème coefficient, on écrit "x_1", "x_2", ..., "x_N".

Les lignes suivantes sont, à partir du 2ème élément, les coefficients permettant d'exprimer le $i$ème x_i pour $i \in I$ **en fonction des** x_i $i \notin I$, et l'avant dernier élément est la coordonnée du sommet relatif à l'indice de la ligne.

Utilisation des tableaux

Dans la 1ère colonne, à partir du 2ème coeff, on écrit "x_i" pour $i \in I$ (I est l'ensemble des indices associés au sommet choisi.

Dans la 1ère ligne, à partir du 2ème coefficient, on écrit "x_1", "x_2", ..., "x_N".

Les lignes suivantes sont, à partir du 2ème élément, les coefficients permettant d'exprimer le $i$ème x_i pour $i \in I$ **en fonction des** x_i $i \notin I$, et l'avant dernier élément est la coordonnée du sommet relatif à l'indice de la ligne.

La dernière colonne "calcule" le θ qui permet de passer de $\hat{X}_I$ à un nouveau sommet pour lequel la coordonnées x_j n'est pas nulle via la relation:

$$X_I + \theta\Gamma_{Ij} = \hat{X}_I.$$

Cet indice j correspond à un des coefficients du coût, **exprimé en fonction des variables** x_i**,** $i \notin I$, le plus petit possible < 0. On reporte les coefficients du coût, **écrit en fonction de** x_i $i \notin J$, dans la dernière ligne du tableau en face de chaque x_i $i \notin I$, et on met au bout l'opposé de la valeur du coût

Utilisation des tableaux

La dernière colonne "calcule" le θ qui permet de passer de $\hat{X}_I$ à un nouveau sommet pour lequel la coordonnées x_j n'est pas nulle via la relation:

$$X_I + \theta\Gamma_{Ij} = \hat{X}_I.$$

Cet indice j correspond à un des coefficients du coût, **exprimé en fonction des variables** x_i**,** $i \notin I$, le plus petit possible < 0. On reporte les coefficients du coût, **écrit en fonction de** x_i $i \notin J$, dans la dernière ligne du tableau en face de chaque x_i $i \notin I$, et on met au bout l'opposé de la valeur du coût

La colonne Γ_{Ij} étant représentée par ses coefficients au dessous de la $j$ème variable, pour calculer θ, on voit que

Utilisation des tableaux

La colonne Γ_{Ij} étant représentée par ses coefficients au dessous de la $j$ème variable, pour calculer θ, on voit que

- Si tous les $\Gamma_{ij}, i \in I$ en dessous de x_j sont <= 0, n'importe quel $\theta > 0$ fera l'affaire. Si le coefficient du coût correspond à cet indice j est < 0 alors le coût n'est pas minorée.

Utilisation des tableaux

La colonne Γ_{Ij} étant représentée par ses coefficients au dessous de la $j$ème variable, pour calculer θ, on voit que

- Si tous les $\Gamma_{ij}, i \in I$ en dessous de x_j sont $<= 0$, n'importe quel $\theta > 0$ fera l'affaire. Si le coefficient du coût correspond à cet indice j est < 0 alors le coût n'est pas minorée.

- Si au moins un des Γ_{ij} est > 0, on met dans la colonne la plus à droite les $\frac{\hat{x}_i}{\gamma_{ij}}$ pour les $\gamma_{ij} > 0$**,** $i \in I$**, le** θ **à choisir étant est la plus petite quantité strictement positive dans cette colonne.**

Utilisation des tableaux

La colonne Γ_{Ij} étant représentée par ses coefficients au dessous de la $j$ème variable, pour calculer θ, on voit que

- Si tous les $\Gamma_{ij}, i \in I$ en dessous de x_j sont $<= 0$, n'importe quel $\theta > 0$ fera l'affaire. Si le coefficient du coût correspond à cet indice j est < 0 alors le coût n'est pas minorée.
- Si au moins un des Γ_{ij} est > 0, on met dans la colonne la plus à droite les $\frac{\hat{x}_i}{\gamma_{ij}}$ pour les $\gamma_{ij} > 0$, $i \in I$, **le θ à choisir étant est la plus petite quantité strictement positive dans cette colonne.**
- Si tous les coefficients du coût sont ≥ 0, on ne peut pas minorer celui-ci mieux qu'on l'a fait.

Utilisation des tableaux

Si l'on a pu calculer un θ, on utilise le coefficient γ_{ij} correspondant comme pivot de Gauss sur toutes les lignes, et on recommence.

Exemple

Exemple: Minimiser $x_4 + x_5$ sur

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_{1,\dots,5} \geq 0, \middle| \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{array} \right\}$$

Exemple

Exemple: Minimiser $x_4 + x_5$ sur

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_{1,\ldots,5} \geq 0, \left| \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{array} \right. \right\}$$

On reconnait ${}^t(0, 0, 0, 3, 2)$ comme sommet de départ qui donne un coût égal à

$$5 - 2x_1 - 3x_2 - 2x_3.$$

Exemple

Exemple: Minimiser $x_4 + x_5$ sur

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_{1,\dots,5} \geq 0, \left| \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{array} \right. \right\}$$

On reconnait ${}^t(0, 0, 0, 3, 2)$ comme sommet de départ qui donne un coût égal à

$$5 - 2x_1 - 3x_2 - 2x_3.$$

Premier tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*Sommet*	θ
x_4	1	2	3	1	0	3	
x_5	1	1	−1	0	1	2	
	−2	−3	−2	0	0	−5	

Exemple

Exemple: Minimiser $x_4 + x_5$ sur

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_{1,\dots,5} \geq 0, \left| \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{array} \right. \right\}$$

On reconnait ${}^t(0, 0, 0, 3, 2)$ comme sommet de départ qui donne un coût égal à

$$5 - 2x_1 - 3x_2 - 2x_3.$$

Premier tableau

$$\begin{array}{cc|ccccc|cc} & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathit{Sommet} & \theta \\ x_4 & & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3/2 \\ x_5 & & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2/1 \\ & & -2 & \boxed{-3} & -2 & 0 & 0 & -5 & \end{array}$$

Exemple

Exemple: Minimiser $x_4 + x_5$ sur

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_{1\ldots 5} \geq 0, \left| \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{matrix} \right. \right\}$$

On reconnait ${}^t(0,0,0,3,2)$ comme sommet de départ qui donne un coût égal à

$$5 - 2x_1 - 3x_2 - 2x_3.$$

Premier tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*Sommet*	θ
x_4	1	2	3	1	0	3	$\boxed{3/2}$
x_5	1	1	−1	0	1	2	2/1
	−2	$\boxed{-3}$	−2	0	0	−5	

Exemple

Exemple: Minimiser $x_4 + x_5$ sur

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_{1\ldots5} \geq 0, \middle| \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{array} \right\}$$

Deuxième tableau

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		*Sommet*	θ
$L1$	x_2	|	$1/2$	$\boxed{1}$	$3/2$	$1/2$	0	|	$3/2$	
$L2$	x_5	|	1	1	-1	0	1	|	2	
$L3$		|	-2	-3	-2	0	0	|	-5	

Exemple

Exemple: Minimiser $x_4 + x_5$ sur

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_{1\ldots.5} \geq 0, \left| \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{array} \right. \right\}$$

On a un deuxième sommet ${}^t(0, 3/2, 0, 0, 1/2)$.

Deuxième tableau

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		*Sommet*	θ
$L1$	x_2	|	$1/2$	$\boxed{1}$	$3/2$	$1/2$	0	|	$3/2$	
$L2 - L1$	x_5	|	$1/2$	0	$-5/2$	$-1/2$	1	|	$1/2$	
$L3 + 3L1$		|	$-1/2$	0	$5/2$	$3/2$	0	|	$-1/2$	

Exemple

Exemple: Minimiser $x_4 + x_5$ sur

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_{1\ldots 5} \geq 0, \left| \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{array} \right. \right\}$$

On a un deuxième sommet ${}^t(0, 3/2, 0, 0, 1/2)$.

Deuxième tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*Sommet*	θ
x_2	$1/2$	1	$3/2$	$1/2$	0	$3/2$	3
x_5	$1/2$	0	$-5/2$	$-1/2$	1	$1/2$	$\boxed{1}$
	$\boxed{-1/2}$	0	$5/2$	$3/2$	0	$-1/2$	

Exemple

Exemple: Minimiser $x_4 + x_5$ sur

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),\ x_{1\ldots 5} \geq 0, \left| \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \end{array} \right.\right\}$$

On a un deuxième sommet ${}^t(0, 3/2, 0, 0, 1/2)$.

Deuxième tableau

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		*Sommet*	θ
x_2	|	$1/2$	1	$3/2$	$1/2$	0	|	$3/2$	3
x_1	|	$\boxed{1}$	0	-5	-1	2	|	1	1
	|	$\boxed{-1/2}$	0	$5/2$	$3/2$	0	|	$-1/2$	

Exemple

On a un troisième sommet ${}^t(1, 1, 0, 0, 0)$.

Troisième tableau

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \textit{Sommet} & \theta \\
x_2 & | & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 & \\
x_1 & | & \boxed{1} & 0 & -5 & -1 & 2 & | & 1 & \\
 & | & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 &
\end{array}
$$

Exemple

On a un troisième sommet ${}^t(1,1,0,0,0)$.

Troisième tableau

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \textit{Sommet} & \theta \\
x_2 & | & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 & \\
x_1 & | & \boxed{1} & 0 & -5 & -1 & 2 & | & 1 & \\
 & | & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 &
\end{array}
$$

Le dernier sommet est donc ${}^t(1,1,0,0,0)$, et on ne peut plus minimiser le coût.

Exemple

On a un troisième sommet ${}^t(1, 1, 0, 0, 0)$.

Troisième tableau

$$
\begin{array}{cc|ccccc|cc}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & Sommet & \theta \\
x_2 & & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & & 1 & \\
x_1 & & \boxed{1} & 0 & -5 & -1 & 2 & & 1 & \\
 & & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 &
\end{array}
$$

Le dernier sommet est donc ${}^t(1, 1, 0, 0, 0)$, et on ne peut plus minimiser le coût.

Par cette méthode, on a réussi à trouver un sommet de ......