Modélisation mathématique des écoulements sanguins à partir de données expérimentales

Laurent Dumas

Laboratoire de Mathématiques de Versailles
Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines

séminaire du laboratoire JLL, 19 novembre 2010

1 Introduction

2 Le modèle simplifié d'écoulement sanguin

3 Approche évolutionnaire et metamodèles

4 Etude préliminaire du problème inverse

5 Reconstructions numériques de réseaux artériels

6 Conclusion

1 Introduction

2 Le modèle simplifié d'écoulement sanguin

3 Approche évolutionnaire et metamodèles

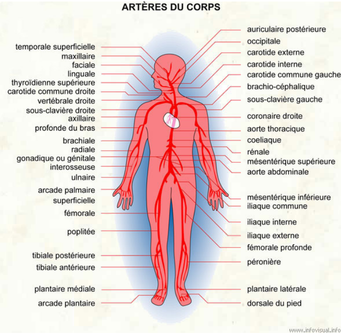
4 Etude préliminaire du problème inverse

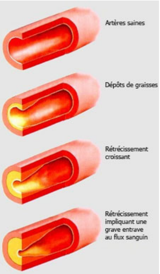
5 Reconstructions numériques de réseaux artériels

6 Conclusion

Introduction

- La simulation numérique des écoulements sanguins dans l'arbre artériel est un problème général complexe car elle nécessite des simulations tridimensionnelles avec interaction fluide-structure.





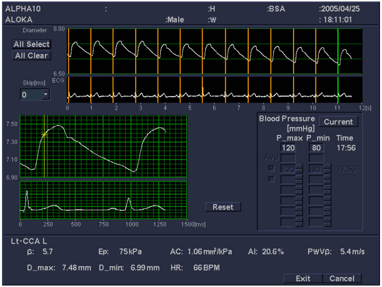
- Une autre difficulté est la détermination précise des nombreux paramètres du modèle pour un patient donné.

Introduction

- Afin de réduire les coûts de telles simulations, des modèles simplifiés monodimensionnels d'interaction fluide structure avec bifurcation d'artères ont été développés.
- Le but de cette étude est de reconstruire fidèlement à l'aide de mesures non invasives toutes les variables hémodynamiques et mécaniques d'un patient donné (pression, vitesse, modules de Young, etc...) pour l'ensemble de son réseau artériel.
- Grâce à une telle reconstruction, le praticien disposera d'informations utiles à un dépistage précoce des principales maladies cardiovasculaires.

Introduction

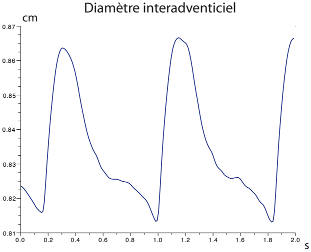
- Le processus expérimental, non invasif et bien adapté au problème, est déjà disponible et s'appelle l'echotracking.

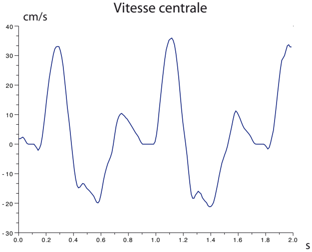


- Il mesure à l'aide de techniques Doppler, les diamètres artériels et les vitesses centrales à diverses positions du réseau artériel.

Introduction

- Les données d'echotracking utilisées ici ont été fournies par le centre de recherche cardiovasculaire de l'Hopital Georges Pompidou (*Pr Boutouyrie*) .
- Parmi les données disponibles pour différents patients, les mesures temporelles de diamètre d'artère et de vitesse centrale seront utilisées ici :





1 Introduction

2 Le modèle simplifié d'écoulement sanguin

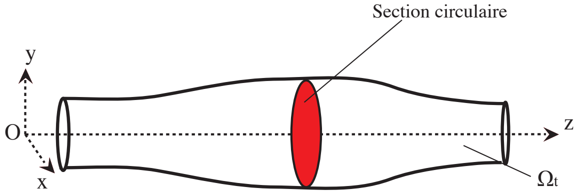
3 Approche évolutionnaire et metamodèles

4 Etude préliminaire du problème inverse

5 Reconstructions numériques de réseaux artériels

6 Conclusion

Dérivation des équation du modèle : hypothèses



- Pour chaque artère, le domaine Ω_t est cylindrique, orienté selon Oz, et de longueur constante L.
- Les quantités impliquées sont supposées constantes sur chaque section de l'artère.
- <u>Références</u> : *Formaggia, Nobile, Quarteroni* (2001),*Sherwin et al.* (2003), *Gerbeau et al.* (2005).

Dérivation des équation du modèle

- Après intégration des équations de Navier Stokes sur chaque section, on obtient le système d'inconnues $A_i(t,z)$ (section de l'artère) et $Q_i(t,z)$ (débit moyen) relatif à l'artère i :

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q_i^2}{A_i}\right) + \frac{A_i}{\rho}\frac{\partial P_i}{\partial z} + K_r\frac{Q_i}{A_i} = 0$$

- Une loi de comportement linéaire élastique complète le système :

$$P_i - P_{ext} = \beta_i(z)\left(\sqrt{A_i(z,t)} - \sqrt{A_{0,i}(z)}\right)$$

Les paramètres du modèle

- Le paramètre K_r représente la résistance visqueuse de l'écoulement par unité de longueur du tube et est considéré connu dans cette étude.
- Les principaux paramètres devant être estimés sont les coefficients β_i de chaque artère. Cette valeur, proportionnelle à la rigidité de l'artère peut être constante ou dépendre de z. Il existe une valeur théorique de β_i issu d'une moyennisation formelle :

$$\beta_i(z) = \frac{4\sqrt{\pi}h_0 E_i(z)}{3A_0}$$

  où h_0 et $E_i(z)$ représentent respectivement l'épaisseur et le module de Young de l'artère i.
- Un autre paramètre important du modèle est la section de l'artère i au repos $z \to A_{0,i}(z)$.

Mise sous forme hyperbolique

- En notant $U = (A, Q)^T$, on peut récrire ce système sous forme conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z}(U) = B(U)$$

avec la matrice de flux H :

$$H(U) = \frac{\partial F}{\partial U}(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Q^2}{A^2} + \frac{\beta}{2\rho} A^{\frac{1}{2}} & 2\frac{Q}{A} \end{bmatrix}$$

et le terme source B :

$$B(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_r \frac{Q}{A} + \frac{A}{\rho} \frac{d\beta}{dz} \left(\sqrt{A_0} - \frac{2}{3}\sqrt{A} \right) \end{bmatrix}$$

Mise sous forme hyperbolique

- Le système est hyperbolique car la matrice de flux possède deux valeurs propres réelles distinctes (et de signe opposé) :

$$\lambda_{1,2} = \frac{Q}{A} \pm \sqrt{\frac{\beta}{2\rho} A^{\frac{1}{2}}}$$

- On peut récrire le système en fonction des variables caractéristiques $W = (W_1, W_2)^T$ possédant ici une expression simple :

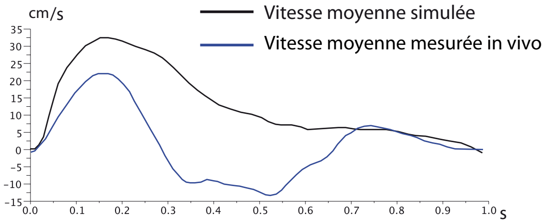
$$W_{1,2} = \frac{Q}{A} \pm 2\sqrt{\frac{2\beta}{\rho}} A^{\frac{1}{4}}$$

- Les relations précédentes peuvent être facilement inversées :

$$A = \left(\frac{2\rho A_0}{\beta}\right)^2 \left(\frac{W_1 - W_2}{8}\right) \text{ et } Q = A\left(\frac{W_1 + W_2}{2}\right)$$

Conditions aux bords

- En entrée, un profil temporel de diamètre peut être imposé, revenant à fixer la valeur de la caractéristique W_1.
- En sortie, on peut utiliser des conditions de non réflexion mais celles-ci s'avèrent peu réalistes :

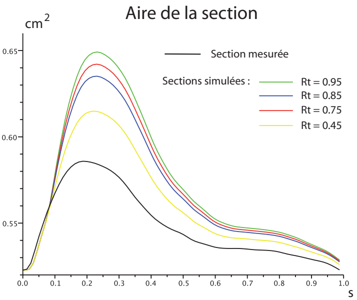


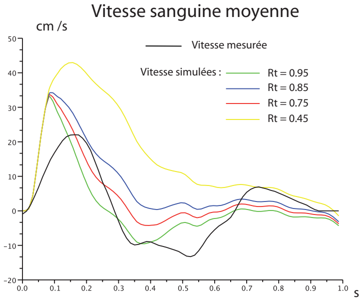
Conditions aux bords

- L'arbre vasculaire situé en aval peut être assimilé à une résistance. Dans ce cas, la condition en sortie s'écrit :

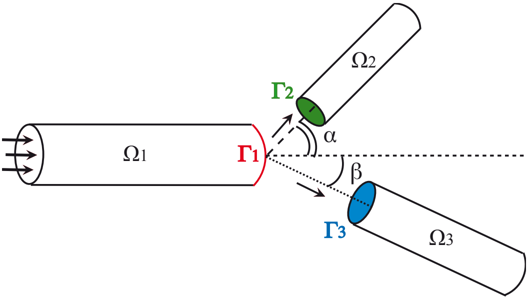
$$W_2^{n+1} = W_2^n + \Delta t \times l_2^T B(U^n) - R_t \times \left(W_1^{n+1}(L) - W_1^0(L)\right)$$

où $R_t \in [0;1]$





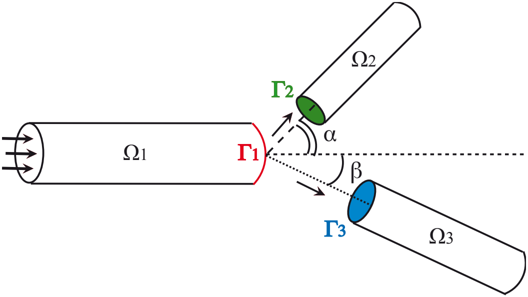
Conditions aux bifurcations



- Une première condition est issue de la conservation de la masse :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

Conditions aux bifurcations

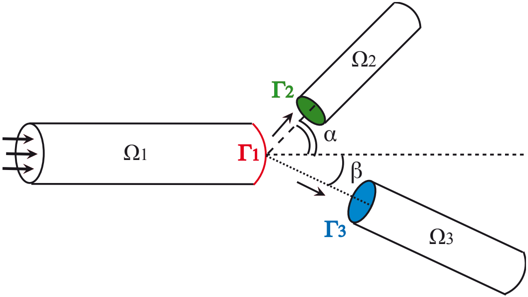


- Deux autres relations portent sur la pression totale :

$$p_1^t - sign\left(u_1\right) f_1\left(u_1\right) = p_i^t + sign\left(u_i\right) f_i\left(u_i\right), \quad i \in \{2, 3\}$$

où p_i^t est la pression totale et $u_i = \frac{Q_i}{A_i}$ la vitesse moyenne du sang dans l'artère i.

Conditions aux bifurcations

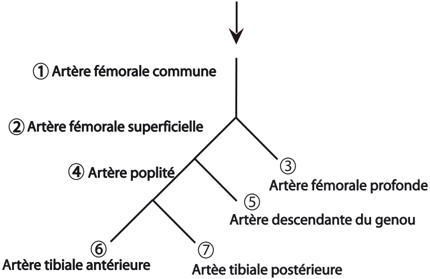


- Pour clore le problème, on complète le système des 3 équations précédentes par 3 équations de compatibilité :

$$
\begin{aligned}
W_{1,1}^{n+1} &= W_{1,1}^{n}\left(L - \lambda_{1,1}^{n}(L)\Delta t\right) \ \text{(pour } \Omega_1\text{)} \\
W_{2,2}^{n+1} &= W_{2,2}^{n}\left(-\lambda_{2,2}^{n}(0)\Delta t\right) \ \text{(pour } \Omega_2\text{)} \\
W_{2,3}^{n+1} &= W_{2,3}^{n}\left(-\lambda_{2,3}^{n}(0)\Delta t\right) \ \text{(pour } \Omega_3\text{)}
\end{aligned}
$$

Exemple de résolution d'un problème direct

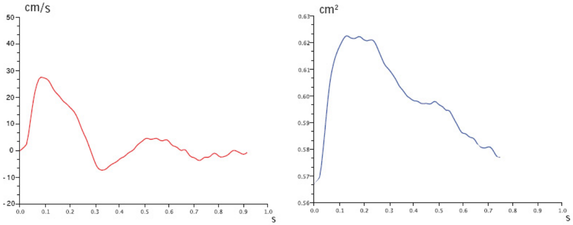
- On présente ici un exemple de simulation du réseau artériel du membre inférieur, composé de 7 artères :



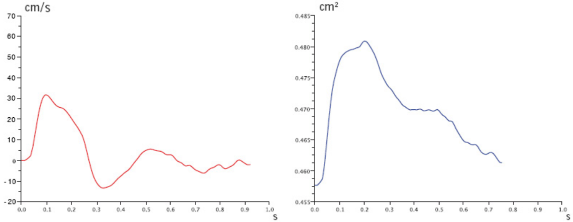
- Les paramètres physiques, comme le diamètre et la rigidité des artères, sont issus de la littérature.
- Les paramètres numériques, comme les résistance en sortie, sont fixés arbitrairement.

Exemple de résolution d'un problème direct

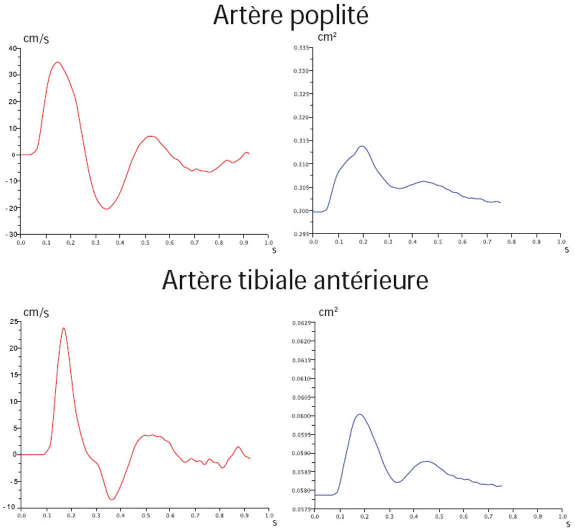
Artère fémorale commune



Artère fémorale superficielle



Exemple de résolution d'un problème direct



1 Introduction

2 Le modèle simplifié d'écoulement sanguin

3 Approche évolutionnaire et metamodèles

4 Etude préliminaire du problème inverse

5 Reconstructions numériques de réseaux artériels

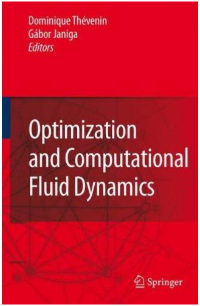
6 Conclusion

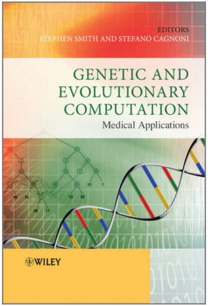
Problème d'optimisation à résoudre

- L'identification des paramètres du présent modèle ($\beta_i, A_{0,i}$ pour chaque artère) à l'aide des données expérimentales se traduit en un problème d'optimisation d'une fonction $J : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Etant donné la complexité de l'évaluation de la fonction coût, le choix s'est porté vers une méthode d'optimisation sans gradient.
- Dans cette famille de méthodes, les algorithmes évolutionnaires permettent de rechercher un optimum global contrairement à la plupart des méthodes déterministes existantes (Nelder Mead, NEWUOA, etc...).

Algorithmes évolutionnaires : historique

- Les algorithmes évolutionnaires (algorithmes génétiques, stratégies d'évolution, PSO, etc...) sont des méthodes stochastiques d'optimisation qui tirent leur nom d'une analogie avec la théorie de l'évolution des espèces de Darwin.
- Références : *Holland* (1976), *Goldberg* (1989), *Cerf* (1994), *Schoenaueur* (1996), *Hansen* (2001), etc...





Principe général d'un algorithme génétique

- Choix d'une population initiale $P_1 = \{x_i^1 \in \mathcal{O}, 1 \leq i \leq N_p\}$
- for n_g from 1 to $Ngen$
- Evaluation de $\{J(x_i^{n_g}), 1 \leq i \leq N_p\}$.
- for k from 1 to $\frac{N_p}{2}$
  - Selection de $(x_\alpha^{n_g}, x_\beta^{n_g})$ par un processus de roulette.
  - Croisement : remplacer $(x_\alpha^{n_g}, x_\beta^{n_g})$ par $(y_\alpha^{n_g}, y_\beta^{n_g})$.
  - Mutation : remplacer $(y_\alpha^{n_g}, y_\beta^{n_g})$ par $(z_\alpha^{n_g}, z_\beta^{n_g})$.
- end for
- Generation de la nouvelle population P_{n_g}.
- end for

Introduction

Le modèle simplifié

Approche évolutionnaire et metamodèles

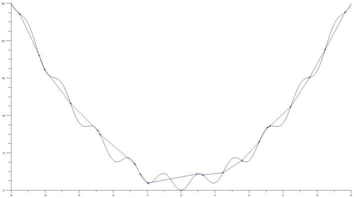
Problème inverse

Reconstructions numériques

Conclusion

Modèles approchés

- Pour rendre plus performants les algorithmes évolutionnaires, l'incorporation d'un modèle approché, affiné au cours des itérations, permet d'améliorer grandement leur efficacité.



- De manière générale, l'objectif consiste à construire une fonction approchée $\tilde{J}$ (*surrogate ou metamodèle*) de la fonction exacte J à patir d'un certain nombre de points $(X_i, J(X_i))_{1 \leq i \leq N}$ où la fonction exacte est supposée connue.
- Références : *Giannakoglou* (2001), *Jin* (2005), etc...

Modèles approchés : méthode de krigeage

- La première méthode présentée ici, appelée méthode de krigeage, est une méthode probabiliste basée sur la minimisation de la variance de l'estimation en un point X donné.
- L'approximation de la fonction coût en un point $X \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\hat{j}(X) = \sum_{i=1}^{N} \omega(X_i) J(X_i)$$

  où on suppose que $\hat{j}(X)$ est une réalisation de la variable aléatoire $\hat{J}(X)$, elle même reliée aux variables aléatoires $J(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ par la relation précédente.
- Afin de déterminer $\hat{j}(X)$, on suppose que la covariance de J en deux points quelconques X et Y est connue :

$$cov(J(X), J(Y)) = c(X, Y)$$

Modèles approchés : méthode de krigeage

- En cherchant à minimiser $var(\hat{J}(X) - J(X))$ tout en imposant $E(\hat{J}(X) - J(X)) = 0$, on aboutit à une relation permettant de déterminer $\hat{j}(X)$:

$$\hat{j}(X) = K^T C^{-1} z$$

  où K est le vecteur colonne de terme général $c(X_i, X)$, C est la matrice de terme général $c(X_i, X_j)$, et z le vecteur colonne de terme général $J(X_i)$.

- Une estimation de la variance au point X est également disponible :

$$var(\hat{J}(X) - J(X)) = c(X, X) - K^T C^{-1} K$$

Modèles approchés : méthode de krigeage

- La fonction de corrélation est en général choisie comme étant de type exponentielle :

$$c(X,Y) = \theta_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - y_i)^2}{r_i^2}\right) + \theta_2$$

- Les paramètres $\Theta = (\theta_1, \theta_2, r_1, ..., r_n)$ sont alors déterminés par le principe du maximum de vraisemblance, c'est à dire en maximisant la fonction :

$$\mathcal{L}(\Theta) = p(J(X_1), ..., J(X_N)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det C}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^T C^{-1} z\right)$$

Modèles approchés : méthode RBF

- Une autre méthode possible, appelée méthode RBF, est construite comme une combinaison linéaire de fonctions radiales centrées en chacun des points X_i.
- L'approximation de la fonction coût en un point $X \in \mathbb{R}^n$ s'écrit alors :

$$\tilde{J}(X) = \sum_{i=1}^{N} w_i h(||X - X_i||)$$

où h désigne une fonction $r \mapsto h(r)$ dite fonction de base radiale.

Modèles approchés : méthode RBF

- Les poids $(w_i)_{1\leq i\leq N}$ sont calculés par résolution de l'équation matricielle $Aw = z$ traduisant l'exactitude du réseau sur les points $(X_i)_{1\leq i\leq N}$, où la matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ a pour terme général $a_{i,j} = h(||X_i - X_j||)$ et le second membre a pour terme général $z_i = J(X_i)$.
- On a donc ici :

$$\tilde{J}(X) = R^T A^{-1} z$$

  où R est le vecteur colonne de terme général $h(||X - X_i||)$.
- Pour des fonctions h bien choisies, on peut montrer que la matrice A est toujours inversible voire définie positive.
- Exemples : $h(r) = (c^2 + r^2)^{\alpha}$ avec $\alpha < 1$, $h(r) = e^{-\frac{r^2}{a^2}}$, etc... .

Modèles approchés : méthode RBF

- Dans le cas où le nombre de points N est très grand, la matrice A peut être mal conditionnée. Afin d'éviter ce problème, deux choix sont possibles.
- Soit un procédé de régularisation de Tychonov est ajouté permettant de réduire le conditionnement de A. Dans ce cas, la méthode RBF cesse d'être une méthode d'interpolation.
- Soit le nombre de points N est réduit à m en ne considérant que les plus proches points du point X à calculer. Dans ce cas, le réseau construit devient local.

Un algoritme évolutionnaire avec modèle approché

- Un algoritme évolutionnaire avec un modèle approché de type RBF local a été développé.
- Le modèle approché est en particulier amélioré au cours des itérations avec un nombre réduit et bien choisi de nouvelles évaluations exactes.
- Les gains de convergence observés par rapport à un algorithme évolutionnaire classique se situent entre un facteur 3 et un facteur 10.

1 Introduction

2 Le modèle simplifié d'écoulement sanguin

3 Approche évolutionnaire et metamodèles

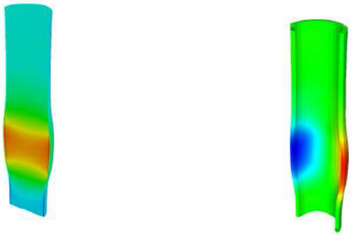
4 Etude préliminaire du problème inverse

5 Reconstructions numériques de réseaux artériels

6 Conclusion

Etude du problème inverse : artère saine

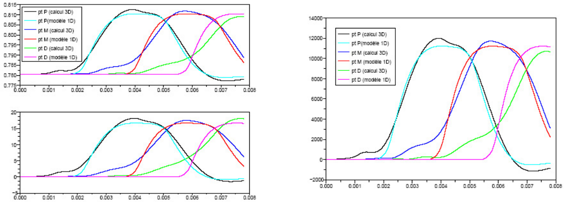
- L'objectif de ce premier problème inverse est d'ajuster le modèle simplifié aux résultats d'un modèle 3D existant (calculé à l'aide du logiciel LifeV).



- Deux approches ont été comparées sur cet exemple avec la même fonction coût, basée sur les profils de A et Q en trois positions : une méthode de gradient et un algorithme évolutionnaire.

Etude du problème inverse : artère saine

- Comme le montrent les résultats ci-dessous (identiques avec les 2 approches), il s'avère possible de retrouver les résultats du modèle 3D à un coût largement moindre.



- A noter aussi que le coefficient β optimal est largement inférieur à celui issu d'une dérivation formelle.
- Cependant, la méthode de gradient n'a pu être étendue à des cas plus complexes en raison de la difficulté croissante du calcul du gradient numérique avec l'état adjoint.

Etude du problème inverse : artère pathologique

- L'objectif de ce second problème inverse est de reconstruire la fonction de rigidité et la section d'une artère stéonosée.
- Le problème comporte ainsi 6 inconnues à déterminer, la position du rétrécissement de l'artère et l'amplitude du saut de rigidité correspondant.
- L'objectif de ce calcul est de montrer qu'avec quelques profils temporels, il est possible de déterminer les caractéristiques complètes de l'écoulement et de l'artère.

Modélisation écoulements sanguins

L. Dumas

Introduction

Le modèle simplifié

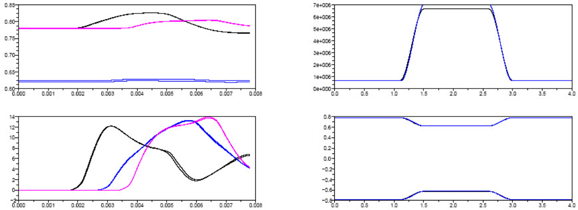
Approche évolutionnaire et metamodèles

Problème inverse

Reconstructions numériques

Conclusion

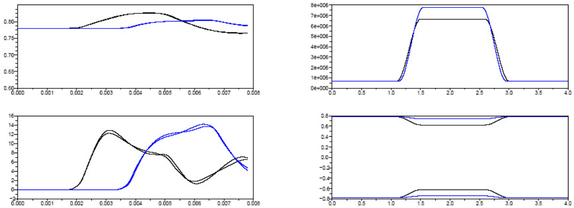
- Quand les profils temporels de A et Q sont connus en trois positions différentes, le processus d'optimisation est capable de déterminer les caractéristiques de la sténose.



- Les valeurs de A et Q sont ainsi parfaitement reproduites aux sections concernées (figures de gauche).

Etude du problème inverse : artère pathologique

- Quand les profils temporels de A et Q sont seulement connus en deux positions (en dehors de la plaque), le processus d'optimisation est à nouveau capable de déterminer la position et à un degré moindre les caractéristiques de la sténose.



- Les profils temporels de A et de Q sont en particulier parfaitement retrouvées aux deux sections concernées.

1 Introduction

2 Le modèle simplifié d'écoulement sanguin

3 Approche évolutionnaire et metamodèles

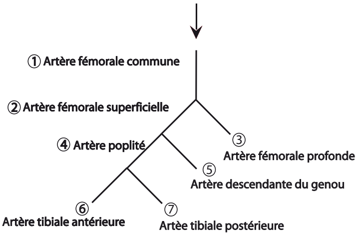
4 Etude préliminaire du problème inverse

5 Reconstructions numériques de réseaux artériels

6 Conclusion

Reconstruction numérique : réseau utilisé

- L'objectif a consisté à reconstruire le réseau artériel des membres inférieurs de différents patients sains à partir de leur résultats d'echotracking.
- Les réseaux étudiés sont identiques pour chacun des patients :



- Les données d'echotracking (profils temporels de diamètre et de vitesse centrale) sont disponibles en 4 sections (artères 1,2,4,6).

Reconstruction numérique : fonctions coût

- On teste ici 2 fonctions coût différentes suivant le nombre de mesures réalisées par echotracking (3 ou 4 profils de vitesse) :

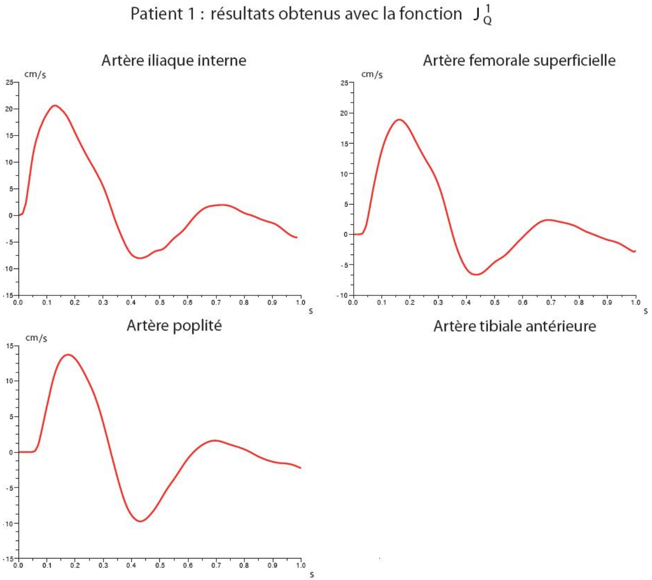
$$J_1(\psi) = \sum_{k\in\{1,2,4\}} \frac{\|\widetilde{Q}(\psi,k) - Q_{echo}(k)\|_{l_2}}{\|Q_{echo}(k)\|_{l_2}}$$

$$J_2(\psi) = \sum_{k\in\{1,2,4,6\}} \frac{\|\widetilde{Q}(\psi,k) - Q_{echo}(k)\|_{l_2}}{\|Q_{echo}(k)\|_{l_2}}$$

  où les inconnues ψ à déterminer sont les coefficients β de chacune des artères du réseau et les coefficients R_t réglant les résistance en sortie de réseau.

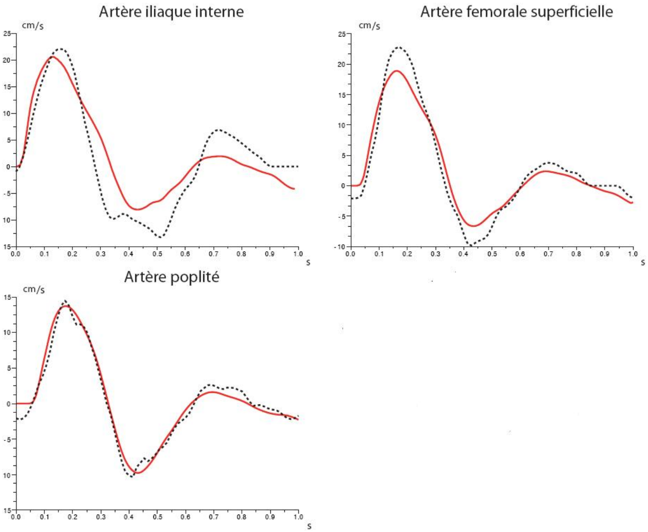
- Un algorithme évolutionnaire avec metamodèle a permis d'obtenir tous les résultats présentés avec moins d'une centaine d'évaluations exactes.

Reconstruction numérique (avec 3 profils)



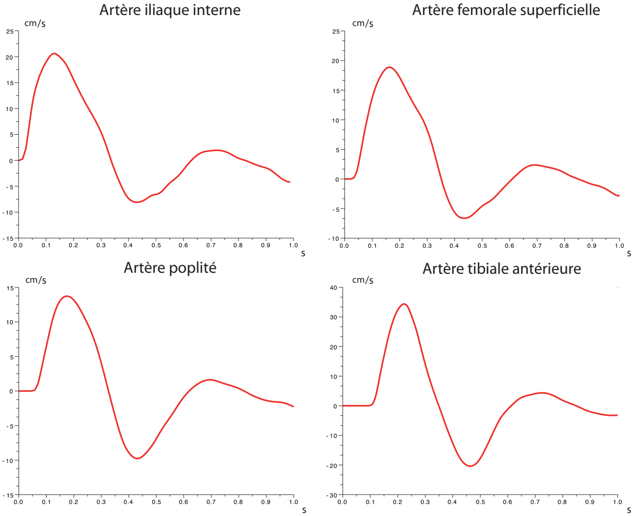
Reconstruction numérique (avec 3 profils)

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^1



Reconstruction numérique (avec 3 profils)

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^1

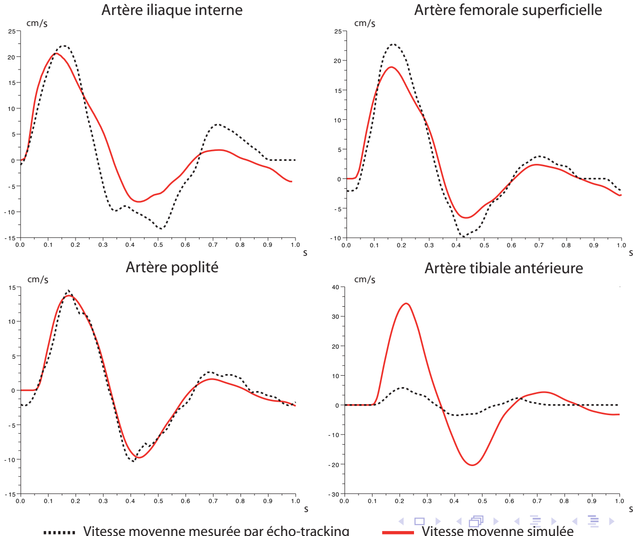


Vitesse moyenne mesurée par écho-tracking

Vitesse moyenne simulée

Reconstruction numérique (avec 3 profils)

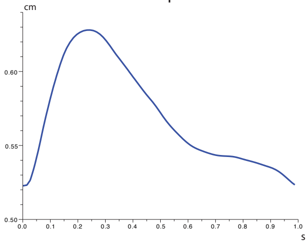
Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^1



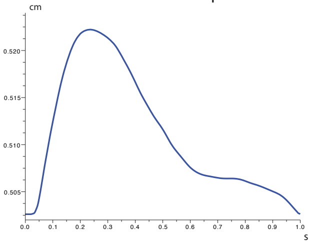
Reconstruction numérique (avec 3 profils)

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^1

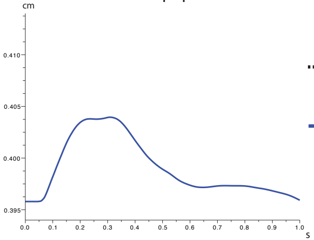
Artère iliaque interne



Artère femorale superficielle



Artère poplité

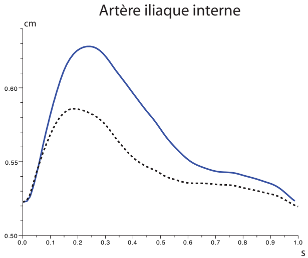


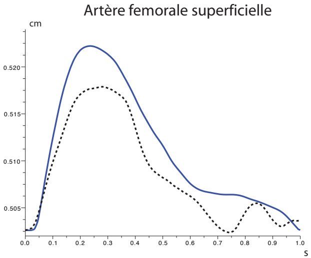
Aire de la section mesurée par écho-tracking

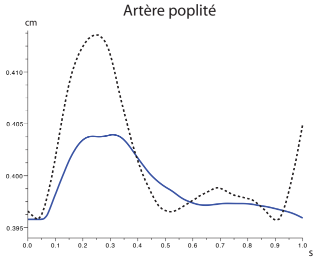
Aire de la section simulée

Reconstruction numérique (avec 3 profils)

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^1





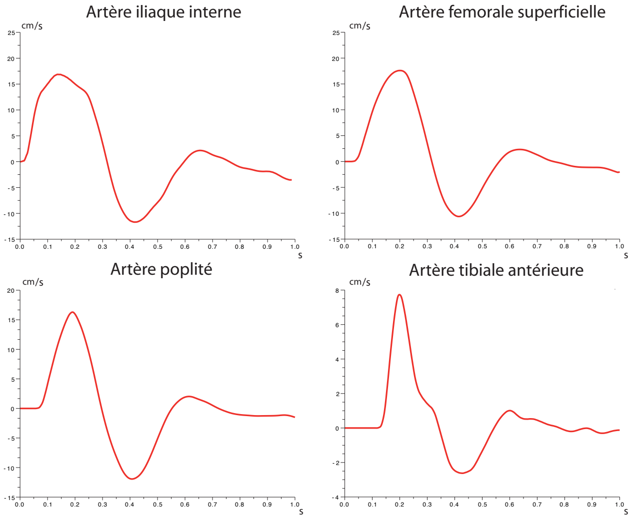


Aire de la section mesurée par écho-tracking

Aire de la section simulée

Reconstruction numérique (avec 4 profils)

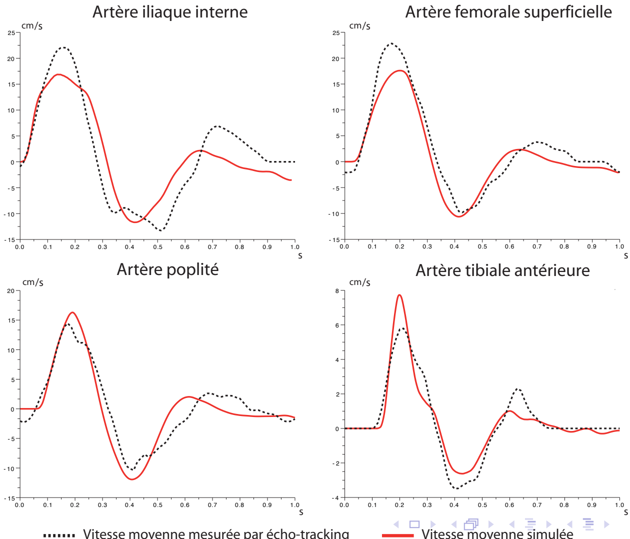
Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2



Vitesse moyenne mesurée par écho-tracking   Vitesse moyenne simulée

Reconstruction numérique (avec 4 profils)

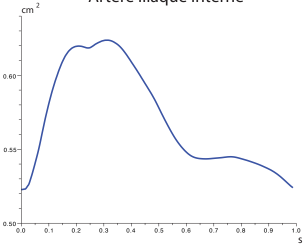
Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2



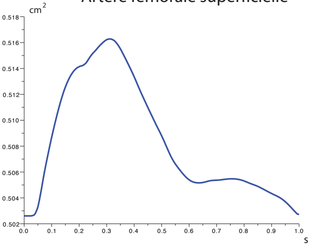
Reconstruction numérique (avec 4 profils)

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2

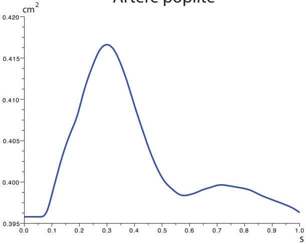
Artère iliaque interne



Artère femorale superficielle



Artère poplité



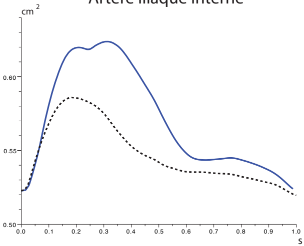
Aire de la section mesurée par écho-tracking

Aire de la section simulée

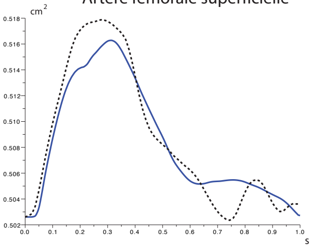
Reconstruction numérique (avec 4 profils)

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2

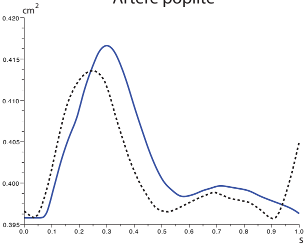
Artère iliaque interne



Artère femorale superficielle



Artère poplité

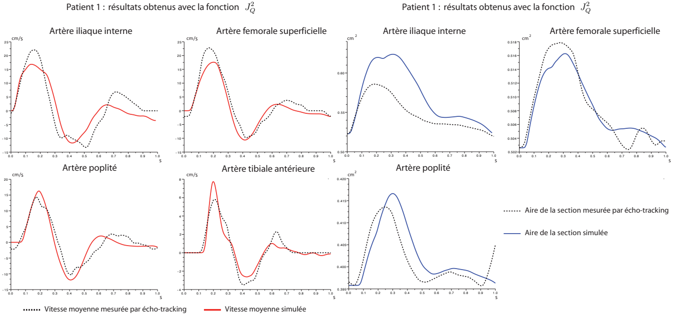


...... Aire de la section mesurée par écho-tracking

—— Aire de la section simulée

Récapitulatif

- Profils d'aire et de vitesse pour les 4 artères :



- Autres informations mises à la disposition du praticien : profils de pression, coefficients de rigidité des 7 artères, etc...

Conclusions et perpectives

- Les premiers résultats de reconstruction du réseau artériel des membres inférieurs de patients sains sont très prometteurs et vont être étendus à de nouveaux cas plus complets.
- Ces résultats montrent en particulier qu'une approche *'patient-spécifique'* est indispensable.
- L'objectif est d'être capable à moyen terme d'exhiber une carte numérique du réseau artériel d'un patient donné à partir de mesures non invasives et d'effectuer ainsi un dépistage précoce de maladies cardiovasculaires.

Quelques manifestations relatives au sujet

- 6 décembre 2010 : *3ème journée sur l'athérosclérose*, Université Paris 5.
- 16-17 décembre 2010 : *30èmes journées de l'hypertension artérielle, session spéciale biomécanique*, Paris, palais des congrès.