Examen 5 Juin 2018.

Durée : 2H00

Toute réponse doit être justifiée.
Une importance particulière sera accordée à la concision ainsi qu'à la propreté de la copie.
Aucun document n'est autorisé.
L'utilisation des calculatrices, téléphones, smartphones, tablettes et ordinateurs n'est pas autorisée.

Exercice 1 - Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, $n \geq 1$, des réels non nuls et $U =]0, +\infty[^n$. Soit f la fonction définie sur U par

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i + \frac{\alpha_i^2}{x_i}), \quad (x_1, \cdots, x_n) \in U,$$

et on considère le problème d'optimisation suivant appelé $(\mathscr{P})$:

$$\text{Min} \quad f(x_1, \cdots, x_n),\ (x_1, \cdots, x_n) \in U.$$

1. L'ensemble U est-il ouvert ? est-il convexe ?
2. La fonction f est-elle convexe sur U ?
3. Calculer le gradient de f.
4. Résoudre le problème $(\mathscr{P})$.

Exercice 2 - Soient $\alpha_1 > 0, \cdots, \alpha_n > 0$, $n \geqslant 2$, des réels fixés et $U =]0, +\infty[^n$. Soit h la fonction définie sur U par

$$h(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i \ln x_i - x_i), \quad (x_1, \cdots, x_n) \in U.$$

et on considère le problème d'optimisation suivant appelé (Q) :

$$\begin{array}{l} \text{Min} \quad h(x_1, \cdots, x_n),\ (x_1, \cdots, x_n) \in U, \\ \text{ et } x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1. \end{array}$$

On supposera dans la suite que tous les points admissibles sont qualifiés.

1. Montrer que h est convexe. Est-elle strictement convexe ?
2. Le problème (Q) est-il un problème convexe ?
3. Justifier pourquoi tous les points admissibles sont qualifiés.
4. Ecrire (sans résoudre) les conditions d'optimalité de type KKT pour le problème ci-dessus.
5. Justifier pourquoi ces conditions sont suffisantes.
6. Montrer que l'équation en λ
$$\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{\lambda}{\alpha_i}} = 1,$$
admet une unique solution λ_0 sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On notera λ_0 cette solution.
7. Résoudre le problème (Q) (on exprimera la ou les solutions en fonction de λ_0 et n).

Exercice 3 -

Soit A une matrice symétrique définie positive, On cherche à minimiser une fonctionnelle quadratique $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que

$$J(X) = \frac{1}{2} < AX, X > - < b, X >$$

sous la contrainte $< c, X >= 0$ avec b et c deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Pour cela, on s'intéresse au script Scilab suivant :

```
n=3;
A=[3,2,0;2,2,0;0,0,2]
b=[1;-1;1]
m=1;
C=[2,-3,1]
//
// solution exacte
//
M=[A,C';C,zeros(m,m)];bb=[b;zeros(m,1)];
X=inv(M)*bb;
Xex=X(1:n);
//
disp('solution exacte');disp(Xex);
//
// solution approch'ee
//
Niter=100;rho=0.1;alpha=0.1;
//
X=[0;1;1]
mu=1;
//
for i=1:Niter
  X=X-rho*(A*X-b+C'*mu);
  mu=mu+alpha*C*X;
end
disp('solution approch\'ee);disp(X)
```

1. Montrer que la fonction J possède un unique minimum et que celui-ci est global.
2. Calculer la solution exacte `Xex` du problème en question dans le script.
3. Quel algorithme approché est utilisé dans la deuxième partie du script ?
4. Expliquer la ligne `X=X-rho*(A*X-b+C'*mu)`.

Exercice 4 -

Donner deux différences et deux similitudes entre une stratégie d'évolution et un algorithme génétique.