1

Corrigé du cc1

Optimisation numérique 2022

Ex 1 (total: 8 pts)

1) (2 pts) On remarque que J est coercive car $J(x,y,z) \geq \|(x,y,z)\|^2$

De plus, S est un ensemble fermé et ainsi J possède au moins un minimum sur S.

Autre solution possible : S est un ensemble compact (fermé et borné) et J est une fonction continue

2) (1 pt)

On écrit le Lagrangien associé :

$$\mathcal{L}(x,y,z,\mu_1,\mu_2) = x^2+y^2+2z^2+\mu_1(x^2+y^2+z^2-4) + \mu_2(1-2x-2y-4z)$$

(x,y,z,μ_1,μ_2) est solution de KKT ssi :

$$\begin{cases} 2x+2\mu_1 x - 2\mu_2 = 0 \\ 2y+2\mu_1 y - 2\mu_2 = 0 \\ 4z+4\mu_1 z - 4\mu_2 = 0 \\ \mu_1 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ 2x+2y+4z \geq 1 \\ \mu_1 \cdot (x^2+y^2+z^2-4) = 0 \text{ et } \mu_2(2x+2y+4z-1) = 0 \end{cases}$$

3) (1pt) En un point de ∂S, les contraintes sont qualifiée si $\{\nabla c_{I_1}(x^*,y^*,z^*), \nabla c_{I_2}(x^*,y^*,z^*)\}$ est libre (pour l'ensemble des contraintes actives).

Or, $\nabla c_{I_1} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix}$ et $\nabla c_{I_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Comme $(0,0,0) \notin S$, le seul cas à considérer est le cas où les 2 contraintes sont actives et $x=y=z$. Cela donne : $4x^2 = 4$ et $8x = 1$, ce qui est impossible. Les contraintes sont donc toujours qualifiées.

4) (4pts) On résout le système KKT :

2

* 1er cas : $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

On trouve $x=y=z=0$ ce qui est impossible car $(0,0,0) \notin S$.

* 2ème cas : $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$

On a alors :

$$x(1+\mu_1) = y(1+\mu_1) = z(1+\mu_1) = 0$$

Or $\mu_1 \geq 0$, cela implique à nouveau $x=y=z=0$ donc il n'y a pas de solutions.

* 3ème cas : $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$

On a alors $x=y=z=\mu_2$. Comme de plus $2x+2y+4z=1$, on trouve $x=y=z=\mu_2=\frac{1}{8}$

Il s'agit bien d'une solution de KKT car $\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2 \leq 4$.

Il s'agit effectivement d'un minimum car $HJ\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \gg 0$

4ème cas $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$.

Dans ce cas, comme $2x+2y+4z=1$ (en sommant les 3 premières relations) il vient : $1+\mu_1-8\mu_2=0$, soit $1+\mu_1=8\mu_2$ et alors

$$16x-2\mu_2=16y\cdot 2\mu_2=32y-4\mu_2=0$$

On retrouve $x=\mu=z=\frac{1}{8}$, ce qui ne convient pas car $x^2+y^2+z^2 \neq 4$.

On peut conclure que $\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$ est donc l'unique minimum de J sur S (sans la condition suffisante d'ordre 2, on peut aussi conclure avec le fait qu'il existe au moins un minimum et que celui-ci est solution de KKT)

Exercice 2 (total : 9 pts)

1) (2pts) On a $J(v) \geq J(0) - \|\nabla J(0)\| \, \|v\| \ldots$

$$\ldots + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers $+\infty$ qd $\|v\| \to +\infty$

J est donc coercive. Elle possède alors au moins un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Si on le note x^*, on a $\nabla J(x^*) = 0$

et si $x \neq x^*$,

$$J(x) \geqslant J(x^*) + 0 + \underbrace{\frac{\alpha}{2}}_{>0} \|x - x^*\|$$

et ce minimum est bien unique (il est global et s'il y en avait un autre, il serait aussi global : impossible)

On peut aussi remarquer que si J est α convexe, alors J est strictement convexe (d'où l'unicité)

3) (1pt) La fonction

$$h \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto J(x_k + t d_k) \end{array} \right)$$

est également coercive, strictement convexe, elle possède un unique minimum sur $\mathbb{R}_+$. Il est atteint en $t_k > 0$ (car d_k est une direction de descente)

4) (1pt) On a $h'(t_k) = 0$, soit :

$$\langle d_k, \nabla J(\underbrace{x_k + t_k d_k}_{x_{k+1}}) \rangle = 0$$

c'est à dire

$$\langle d_k, -d_{k+1} \rangle = 0 \quad //$$

5) (1+1 pts) On a

$$J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \langle \nabla J(x_{k+1}), x_k - x_{k+1} \rangle + \frac{\alpha}{2} \| x_k - x_{k+1} \|^2$$

Or,

$$\underbrace{\langle \nabla J(x_{k+1}), x_k - x_{k+1} \rangle = \langle -d_{k+1}, -t_k d_k \rangle}_{=0}$$

En sommant de 0 à N ces inégalités et en notant m un minorant de J, on a

$$\frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{N} \| x_{k+1} - x_k \|^2 \leq J(x_0) - m$$

La série à terme positifs est majorée donc elle converge et son terme général tend en particulier vers 0 :

$$\lim_{k \to +\infty} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

6) (1pt) On a :

$$\underbrace{\| \nabla J(x_{k+1}) - \nabla J(x_k) \|^2}_{\| \nabla J(x_{k+1}) \|^2 + \| \nabla J(x_k) \|^2 - 2 \underbrace{\langle \nabla J(x_{k+1}), \nabla J(x_k) \rangle}_{=0}} \leq L^2 \| x_{k+1} - x_k \|^2$$

D'où

$$\| \nabla J(x_k) \|^2 \leq L^2 \| x_{k+1} - x_k \|$$

7) (1pt) La suite (x_k) est bornée car $J(x_k) \leq J(x_0)$ et J est coercive (raisonner par l'absurde)

8) (1pt) Comme la suite est bornée, elle possède une valeur d'adhérence $\tilde{x}$. On montre que celle-ci est unique :

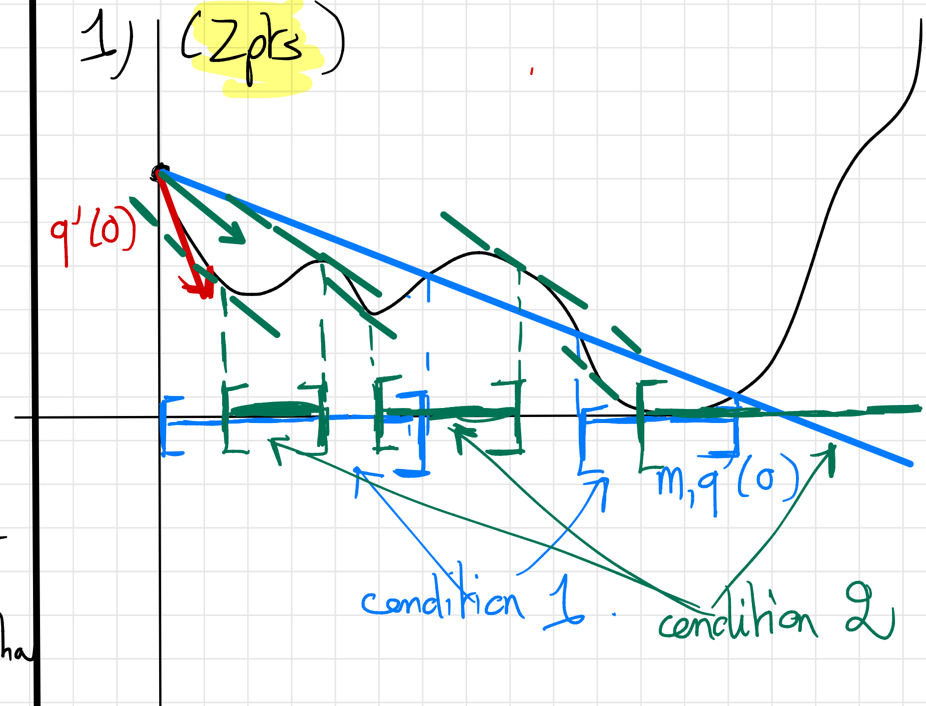
On a $\lim_{k\to+\infty} \nabla J(x_k) = 0$

soit en passant à la limite $\nabla J(\tilde{x}) = 0$. Or, il existe un unique point critique (on peut utiliser la stricte convexité, ou l'alpha convexité), il s'agit de x^*, minimum global de J. On a donc $\lim_{k\to+\infty} x_k = x^*$

Ex 3 (Total : 7 pts)

6

1) (2pts)



2a) (2pts)

Si on répète une infinité de fois cette condition, on se trouve à chaque fois dans la situation suivante :

$t_d = 0$: t trop petit

et alors $t = \lambda^k t_{init}$ (au bout de k passages), soit $t \to +\infty$.

Ceci est impossible car f est coercive et on ne peut avoir

$$\underbrace{q(t)}_{\downarrow \, +\infty} \leq \underbrace{q(0) + m_1 t q'(0)}_{\downarrow \text{ quand } t \to +\infty \; -\infty}$$

2b) (2pts)

Si on répète une infinité de fois cette condition, on se trouve dans la situation où on peut construire une suite t_k "$= t_{new}$" telle que $t_g \leq t_k \leq t_d$ avec

$$\begin{cases} q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0) \text{ et} \\ q'(t_k) < m_2 q'(0) \end{cases}$$

ou $q(t_k) > q(0) + m_1 t_k q'(0)$.

(Comme il s'agit d'un principe similaire à la dichotomie) on se retrouve alors dans le cas d'une suite d'intervalles emboîtés et donc de suites adjacentes.

On note t^* les limites communes.

Comme t_g est trop petit et t_d trop grand, par passage à la limite, on a nécessairement

$$q(t^*) = q(0) + m_1 t^* q'(0).$$

Avec $q(t_d) \geq q(0) + m_1 t_d q'(0)$ (t_d trop grand), on a

$$q(t_d) - q(t^*) \geq m_1 \underbrace{(t_d - t^*)}_{>0} \underbrace{q'(0)}_{<0}$$

puis en faisant un nouveau passage à la limite

$$\underbrace{\frac{q(t_d)-q(t^*)}{t_d - t^*}}_{\downarrow\, q'(t^*)} \geq m_1 q'(0)$$

Or $q'(t^*) \leq m_2 q'(0) < m_1 q'(0)$

Ceci est donc absurde.

c) (2 pt) Comme on ne passe qu'un nombre fini de fois dans l'étape 2, on conclut qu'au bout d'un nombre fini de fois l'étape 1 se termine. On a donc trouvé un élément t vérifiant les 2 conditions demandées. //