Université de Versailles — Année 2022-2023
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/M1-optim.html — semestre 1

Contrôle continu 1: optimisation numérique

Exercice 1

Soit la fonction

$$J(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$$

à minimiser sur l'ensemble

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{"}, \quad x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4 \text{ et } 2x + 2y + 4z \geq 1\}$$

1. Montrer que le problème admet au moins une solution
2. Ecrire les conditions KKT associées au problème
3. Les contraintes sont-elles qualifiées en tout point de S ?
4. Déterminer l'ensemble des minimas de J sur S.

Exercice 2

Soit J une fonction C^1 de R^n dans R, avec ∇J Lipschitzien (constante L). On suppose également que J est α-convexe c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n, \quad J(v) \geq J(u) + < \nabla J(u), v - u > + \frac{\alpha}{2}||v-u||^2$$

1. Montrer que J est coercive. En déduire qu'elle possède un unique minimum x^* sur $\mathbb{R}^n$.
2. On considère une méthode de descente du type

   $$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$$

   où d_k désigne la direction de descente du gradient et t_k le pas dans cette direction supposé satisfaire la conditions suivante :

   $$\forall t \in \mathbb{R}^+, J(x_k + t_k d_k) \leq J(x_k + t d_k)$$

3. Montrer que la suite est bien définie de manière unique.
4. Montrer que deux directions de descente consécutives de la suite (x_k) sont orthogonales.
5. En déduire

   $$J(x_k) - J(x_{k+1}) \geq \frac{\alpha}{2}||x_{k+1} - x_k||^2$$

   puis que $x_{k+1} - x_k$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.
6. Montrer que

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad ||\nabla J(x_k)||^2 \leq L^2 ||x_{k+1} - x_k||^2$$

7. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.
8. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x^*.

Exercice 3

On considère f une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, coercive et telle que son gradient soit Lipschitzien.

On considère une méthode de descente du type

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$$

où d_k désigne une direction de descente et t_k le pas dans cette direction supposé satisfaire la condition suivante :

$$q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0) \quad \text{et} \quad q'(t_k) \geq m_2 q'(0)$$

où on a noté $q(t) = f(x_k + td_k)$ et où m_1 et m_2 sont deux réels tels que $0 < m_1 < m_2 < 1$ (règle de Wolfe).

Il a été vu en exercice que, sous réserve d'existence, cette méthode est convergente au sens usuel lorsque d_k est la direction de descente du gradient . On complète ici la démonstration avec l'existence d'une telle suite.

1. Donner un exemple graphique des valeurs de t_k admissibles dans le cas d'une fonction à une variable tracée 'à la main'.
2. Soit l'algorithme de construction de t_k suivant :

   -- Etape 0: on part de $t = t_{init} > 0$. On note $t_g = 0$ et $t_d = 0$. Soit $\lambda > 1$.
   -- Etape 1: On teste t suivant les critères a) b) et c):
      -- si a), c'est fini
      -- si b) (t trop grand), on note $t_d = t$ et on passe à l'étape 2.
      -- si c) (t trop petit), on note $t_g = t$ et on passe à l'étape 2.
   -- Etape 2
      -- si $t_d = 0$, on calcule $t_{new} = \lambda t$
      -- Si $t_d > 0$, on calcule $t_{new} = \frac{t_g + t_d}{2}$.
   -- Etape 3: on boucle avec l'étape 1 avec le nouveau t.
   avec a) b) et c) les conditions suivantes:
      a) t_k *est satisafaisant si* $q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0)$ *et* $q'(t_k) \geq m_2 q'(0)$.
      b) t_k *est trop grand si* $q(t_k) > q(0) + m_1 t_k q'(0)$.
      c) t_k *est trop petit si* $q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0)$ *et* $q'(t_k) < m_2 q'(0)$

   (a) Montrer par l'absurde qu'il est impossible de répéter une infinité de fois la première condition de l'étape 2.
   (b) Montrer par l'absurde qu'il est impossible de répéter une infinité de fois la deuxième condition de l'étape 2. On pourra construire t_g et t_d deux suites adjacentes de limite t^* pour lequel $q(t^*) = q(0) + m_1 t^* q'(0)$.
   (c) Conclure