# Corrigé du CC2 "Optimisation numérique", année 2022-23

## Ex 1 (8 pts)

1.) (2 pts) $K$ est un ensemble fermé (par intersection) et $J$ est (et continue) coercive $\Rightarrow$ existence d'un minimum de $J$ sur $K$.

De plus, $K$ est convexe (par intersection) et $J$ est strictement convexe sur $K$ $\Rightarrow$ unicité du minimum //

2) (1 pt) $J_e(x) \geq J(x) \Rightarrow J_e$ est coercive sur $\mathbb{R}^n$. De plus, $J_e$ est également continue d'où l'existence d'un minimum de $J_e$ sur $\mathbb{R}^n$.

Comme le maximum de 2 fonctions convexes est convexe, tout comme le carré d'une fonction convexe positive, on en déduit que $J_e$ est strictement convexe $\Rightarrow$ unicité du minimum //

3) (1 pt) Comme $x_e$ est minimum :

$J_e(x_e) \leq J_e(x^*) = J(x^*)$. De plus

$J(x_e) \leq J_e(x_e) \leq J(x^*)$ //

4) (1pt) Comme $J$ est coercive, on ne peut avoir $\|x_{\rho_n}\| \to +\infty$. Ainsi, $(x_\rho)_{\rho>0}$ est bornée //

5) (2pt). Soit $\tilde{x}$ une valeur d'adhérence telle que $x_{\rho_n} \to \tilde{x}$, avec $\rho_n \to +\infty$. On a alors :

$$\underbrace{J_{\rho_n}(x_{\rho_n})}_{\leq J(x^*)} = \underbrace{J(x_{\rho_n})}_{\leq J(x^*)} + \rho_n \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \max(F_i(x_{\rho_n}),0)^2}_{\downarrow \sum_{i=1}^{m} \max(F_i(\tilde{x}),0)^2}$$

Comme $\rho_n \to +\infty$, on doit avoir $\sum_{i=1}^{m} \max(F_i(\tilde{x}),0)^2 = 0$, soit $\tilde{x} \in K$. De plus, par passage à la limite dans l'inégalité $J(x_{\rho_n}) \leq J(x^*)$, on a alors $J(x^*) = J(\tilde{x})$ et $\tilde{x} = x^*$ //

6) (1pt) Une suite bornée possédant une seule valeur d'adhérence est convergente.

## Ex 2 (9 pts)

1) (1pt) En notant $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, les valeurs propres de $A$, les valeurs propres de $I - \rho_1 A$ sont donc

$$1 - \rho_1 \lambda_n \leq \dots \leq 1 - \rho_1 \lambda_n < 1$$

Il suffit donc de prendre

$\rho_1 \in ]0, \frac{2}{\lambda_n}[$ pour avoir

$\beta = \| I - \rho_1 A \| < 1$. //

2) (3 pts)

On a :

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho_1 \rho_2 C u_{k+1} \text{ et} \\ \lambda^* = \lambda^* + \rho_1 \rho_2 \; C u^* \end{cases}$$

En soustrayant et en prenant la norme au carré, il vient :

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|^2 \leq \|\lambda_k - \lambda^*\|^2 + (\rho_1\rho_2)^2 \|C(u_{k+1} - u^*)\|^2$$
$$+ 2 \langle \lambda_k - \lambda^*, \rho_1 \rho_2 C(u_{k+1} - u^*) \rangle$$

soit :

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|^2 \leq \|\lambda_k - \lambda^*\|^2 + (\rho_1\rho_2)^2 \|{}^tCC\| . \|u_{k+1} - u^*\|^2$$
$$+ 2 \rho_1\rho_2 \langle {}^tC(\lambda_k - \lambda^*), u_{k+1} - u^* \rangle \quad (*) \quad //$$

3) (3 pts) On a

$u_{k+1} = u_k - \rho_1 (A u_k - b + {}^tC \lambda_k)$ et

$u^* = u^* - \rho_1 (A u^* - b + {}^tC\lambda^*)$, soit

$u_{k+1} - u^* = (I - \rho_1 A)(u_k - u^*) - \rho_1 {}^tC(\lambda_k - \lambda^*)$

soit, en prenant le produit scalaire avec $2(u_{k+1} - u^*)$, et en ajoutant avec la relation $(*)$ divisée par $\rho_2$, il vient :

$$\frac{\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|^2}{\rho_2} + 2\|u_{k+1} - u^*\|^2 \leq \frac{\|\lambda_k - \lambda^*\|^2}{\rho_2} + \ldots$$

(TSVP)

$$\dots + \underbrace{2\beta \|u_{k+1}-u^*\| \, \|u_k - u^*\|}_{\leq \beta\left(\|u_{k+1}-u^*\|^2 + \|u_k-u^*\|^2\right)} + \rho_1^2\rho_2 \|{}^tCC\| \, \|u_{k+1}-u^*\|^2 + 0$$ //

et la relation demandée s'en déduit avec

$$\gamma = 2 - \rho_1^2\rho_2 \|{}^tCC\| - 2\beta > 0 \text{ par } \rho_2 \text{ assez petit}$$

4) (2pts) La suite de terme général

$$\|u_k - u^*\|^2 + \frac{1}{\rho_2}\|\lambda_k - \lambda^*\|^2 \text{ est décroissante}$$

et minorée (par 0), donc convergente.

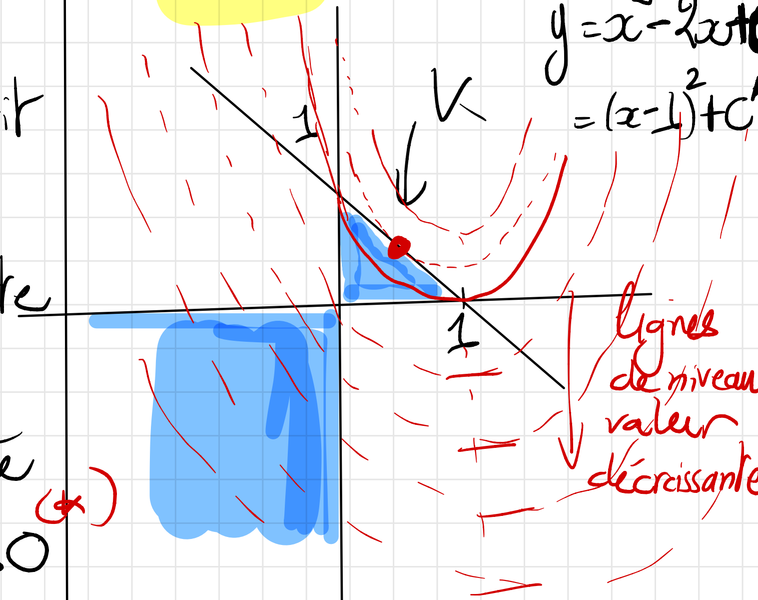
La différence de 2 termes consécutifs de cette suite tend donc vers 0 (*) et ainsi $u_k - u^* \to 0$

On en déduit que ${}^tC(\lambda_k - \lambda^*) \to 0$ puis que $\lambda_k \to \lambda^*$ (car ${}^tC$ de rang maximal)

(*) on peut aussi le faire avec une série à termes positifs majorée //

# Ex 3 (10 pts)

1) (2 pts)




Le maximum de $f$ sur $K$ semble atteint en $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

2) (4pts)

On minimise $-f$ sur $K$ : on calcule le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x,y,\mu_1,\mu_2) = -2x + x^2 - y + \mu_1(x+y-1) + \mu_2(-xy)$$

Les conditions KKT s'écrivent :

$$\begin{cases} -2 + 2x + \mu_1 - \mu_2 y = 0 \\ -1 + \mu_1 - \mu_2 x = 0 \\ x + y \leq 1 \\ xy \geq 0 \\ \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0 \\ \mu_1(x+y-1) = 0 ; \mu_2 xy = 0 \end{cases}$$

Cas 1 : $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$ :

pas de solution //

Cas 2 : $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} -2 + 2x + \mu_1 = 0 \\ -1 + \mu_1 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

ce qui donne : $\mu_1 = 1$ ; $x = y = 1/2$

Cas 3 : $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} -2 + 2x - \mu_2 y = 0 \\ -1 - \mu_2 x = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \mu_2 = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ pas de solution.

Cas 4 : $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$

Dans ce cas $x+y=1$ et $xy=0$

soit $\begin{cases} x=1 \text{ et } y=0 \\ \text{ou} \\ x=0 \text{ et } y=1 \end{cases}$

ce qui donne respectivement :

$\begin{cases} \mu_1 = 0 \text{ et } \mu_2 = -1 \\ \text{ou} \\ \mu_1 = 1 \text{ et } \mu_2 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ pas de solution.

Au final, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est l'unique solution de KKT.(*) De plus, si $\|(x,y)\| \to +\infty$ ; $(x,y) \in K$

(*) et les contraintes sont qualifiées

on a forcément

$x \to -\infty$ et/ou $y \to -\infty$

(et sinon $|x|$ borné et/ou $|y|$ borné)

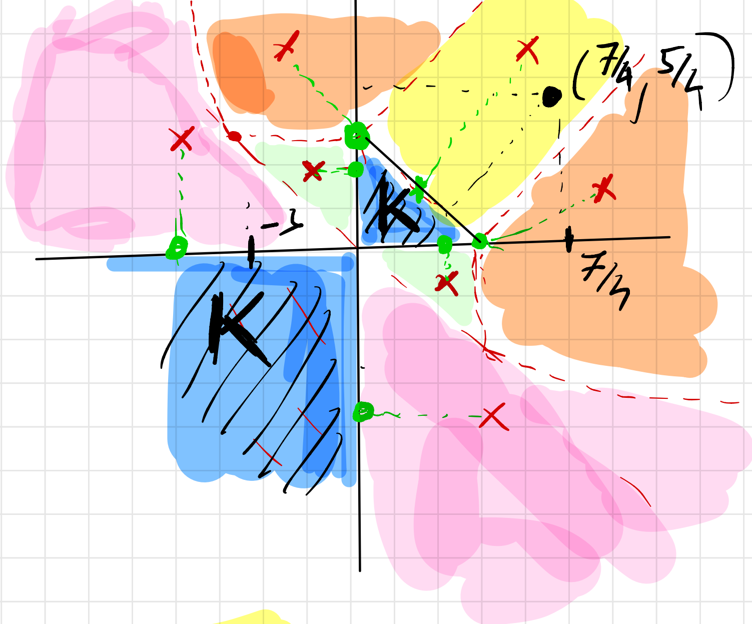
Comme $\begin{cases} -2x+x^2 \to +\infty \text{ quand } x \to -\infty \\ -y \to -\infty \text{ quand } y \to -\infty \end{cases}$

alors $(-f)$ est coercive sur $K$.

Elle possède donc au moins un minimum sur $K$. C'est forcément $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. (**)

3) (2 pts) Graphiquement, on représente l'opérateur de projection :

(**) on peut aussi le faire en regardant la CS d'ordre 2




7

4) (2pts)

(b) on calcule :

$$X_1 = P_K\left(X_0 + \rho \nabla f(X_0)\right)$$

Ici : $\nabla f(X_0) = \begin{pmatrix} 2-2X_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X_0 + \rho \nabla f(X_0) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

et $P_K\left(X_0 + \rho \nabla f(X_0)\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tel que :

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ (\alpha - 7/4) &= (\beta - 5/4) \end{aligned}\right\} \text{ soit :}$$

$\alpha - 7/4 = -1/4 - \alpha$ et $\alpha = 3/4, \beta = 1/4$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$