CC2: optimisation numérique

Exercice 1

Soit J une fonction continue, strictement convexe et coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \quad F_i(x) \leq 0,\, i \in \{1, ..., m\}\}$$

où les fonctions F_i sont convexes et continues pour tout $i \in \{1, ..., m\}$.

On considère la fonction pénalisée :

$$J_\rho(x) = J(x) + \rho \sum_{i=1}^{m} \max(F_i(x), 0)^2$$

où $\rho > 0$ est un paramètre de pénalisation.

1. Montrer que J possède un unique minimum sur K, noté x^*.
2. Montrer que J_ρ possède un unique minimum x_ρ sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que pour tout $\rho > 0$, on a $J(x_\rho) \leq J(x^*)$.
4. En déduire que la famille $(x_\rho)_{\rho>0}$ est bornée.
5. Montrer que la seule valeur d'adhérence possible de toute suite $(x_{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\rho_n \to +\infty$ est égale à x^*.
6. En déduire que toute suite $(x_{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\rho_n \to +\infty$ tend vers x^*.

Exercice 2

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction quadratique telle que

$$J(x) = \frac{1}{2}\, {}^t x A x - {}^t b x$$

avec A une matrice symétrique définie positive de taille n et $b \in \mathbb{R}^n$, à minimiser sous la contrainte

$$Cx = 0$$

avec C une matrice de taille $p \times n$ ($p < n$), de rang maximal p.

Il a été vu en TD que J admet un unique minimum global x^* sur $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\, Cx = 0\}$.

De plus, il existe un unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\begin{cases} Ax^* + {}^t C \lambda^* = b \\ \hfill Cx^* = 0 \end{cases}$$

On considère la méthode d'Uzawa-Arrow-Hurwicz :

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k - \rho_1(Au_k - b + {}^tC\lambda_k) \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho_1\rho_2 C u_{k+1} \end{cases}$$

avec $(u_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ donnés.

1. Montrer que si ρ_1 est suffisamment petit, alors on a

$$\beta = ||I - \rho_1 A|| < 1$$

   (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$).
2. On suppose que ρ_1 vérifie l'inégalité précédente. Montrer que

$$||\lambda_{k+1} - \lambda^*||^2 \leq ||\lambda_k - \lambda^*||^2 + (\rho_1\rho_2)^2||{}^tC\,C||.||u_{k+1} - u^*||^2 + 2\rho_1\rho_2 < {}^tC(\lambda_k - \lambda^*), u_{k+1} - u^* >$$

3. En déduire que pour ρ_2 assez petit, on a

$$\gamma||u_{k+1} - u^*||^2 \leq \left(\frac{||\lambda_k - \lambda^*||^2}{\rho_2} + \beta||u_k - u^*||^2\right) - \left(\frac{||\lambda_{k+1} - \lambda^*||^2}{\rho_2} + \beta||u_{k+1} - u^*||^2\right)$$

   avec $\gamma > 0$ à déterminer.
4. En déduire que u_k converge vers u^* puis que λ_k converge vers λ^*.

Exercice 3

On considère la fonnction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y) = 2x - x^2 + y$$

à maximiser sur

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y \leq 1 \quad \text{et} \quad xy \geq 0\}$$

1. Déterminer graphiquement la solution du problème en traçant K ainsi que quelques lignes de niveau de f
2. Déterminer la solution exacte du problème en écrivant les conditions KKT du problème.
3. On souhaite utiliser la méthode du gradient projeté à pas constant pour approcher la solution.
   (a) Décrire explicitement l'opérateur de projection à utiliser.
   (b) On se donne $X_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et $\rho = 1$. Calculer X_1 avec cette méthode.