Corrigé du CC3 : optimisation numérique, année 2022-23

Ex 1 (Total : 6 pts)

1)
$$cm(D) = \min_{\|v\|=1} \left(\max_{d\in D} \langle v, \frac{d}{\|d\|} \rangle \right)$$

est bien définie car la fonction $v \mapsto \max_{d\in D}(\langle v, \frac{d}{\|d\|} \rangle)$ est bien définie (D ensemble fini) et continue sur S^1 ensemble compact. Elle passède donc un minimum (1 pt)

De plus, il existe $d \in D$ tel que $\langle v, d \rangle > 0$. En effet, par l'absurde, on suppose $\langle v, d \rangle \leq 0$ $\forall d \in D$.

Or, on sait que

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i \underbrace{d_i}_{\in D}, \text{ avec } \lambda_i \geq 0.$$

Cela implique que

$$\sum_{i\in I} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{\langle v, d_i \rangle}_{\leq 0} = \langle v, v \rangle \leq 0$$

D'où $v = 0$, ce qui est impossible.

A nouveau, avec la compacité de S^1, on a bien $cm(D) > 0$ (2 pts)

2) En notant $g(t) = f(x+\alpha t d)$ $(t \in [0,1])$, on a

$$g'(t) = \langle \nabla f(x+td), \alpha d \rangle$$

D'où $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt$, ce qui est l'indication proposée (1 pt).

On a de plus, par définition, pour tout $d \in D$:

$$cm(D) \leq \left\langle \frac{-\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}, \frac{d}{\|d\|} \right\rangle,$$

soit de manière équivalente :

$$\|\nabla f(x)\| . \|d\| . \alpha\, cm(D) \leq \langle -\alpha \nabla f(x), d \rangle$$

En ajoutant cette inégalité à l'indication, il vient :

$$\|\nabla f(x)\| \, \|d\| \, \alpha\, cm(D) \leq \underbrace{\int_0^1 \langle \nabla f(x+t\alpha d), \alpha d \rangle - \langle \alpha \nabla f(x), d \rangle}$$

Le second membre se réécrit :

$$\int_0^1 \langle \nabla f(x+t\alpha d) - \nabla f(x), \alpha d \rangle\, dt$$

et se majore par :

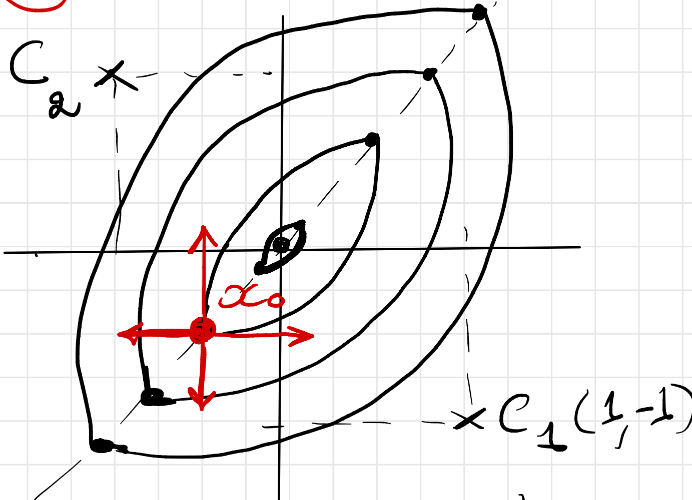
$$\Big(L \alpha \|d\| \underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{1/2} \Big) \alpha \max_{d \in D} \|d\|, \text{ soit :}$$

$$\|\nabla f(x)\| \leq \frac{L}{2}\, cm(D)^{-1} \left(\max_{d \in D} \|d\| \right) . \alpha$$

(2 pts)

Ex 2 (total : 6 pts)

1)



Les lignes de niveau de f sont la réunion de deux arcs de cercle (2pts)

2) $f(x) = \frac{1}{2} \max(\|x-c_1\|^2, \|x-c_2\|^2)$ est continue (maximum de 2 fonctions continues).

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$, la fonction est C^1. Par contre,

si $x<y$: $\nabla f(x,y) = \nabla(\|x-c_1\|^2) = 2\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$

et

si $x>y$, $\nabla f(x,y) = 2\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

en $(0,0)$, la fonction $(x,y) \mapsto \nabla f(x,y)$ ne peut être prolongée par continuité. La fonction n'est donc pas C^1 (ni C^2) (2pts)

3) En $x_0(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, les directions $\{N, S, E, W\}$ ne sont pas des directions de descente. La méthode pattern search va stationner en x_0 2pts

Ex3 (total : 4 pts)

1) Le minimum se situe en $(0, -0{,}5)$

(0,5 pts)

2) Lors de l'itération 1, le point x_r généré est plus mauvais que le plus mauvais point x_3^0 (on se trouve dans le cas "4" de Nelder Mead)

On teste donc le point :

$$\tilde{x} = x_3^0 + \frac{1}{2}(x_c - x_3^0)$$

Comme ce point est meilleur que x_3^0 (au sens de son évaluation par f), on le garde et on remplace x_3^0 par $\tilde{x}$ dans le triangle.

Le même scénario se reproduit lors des 3 itérations suivantes ("cas 4" sans échec)

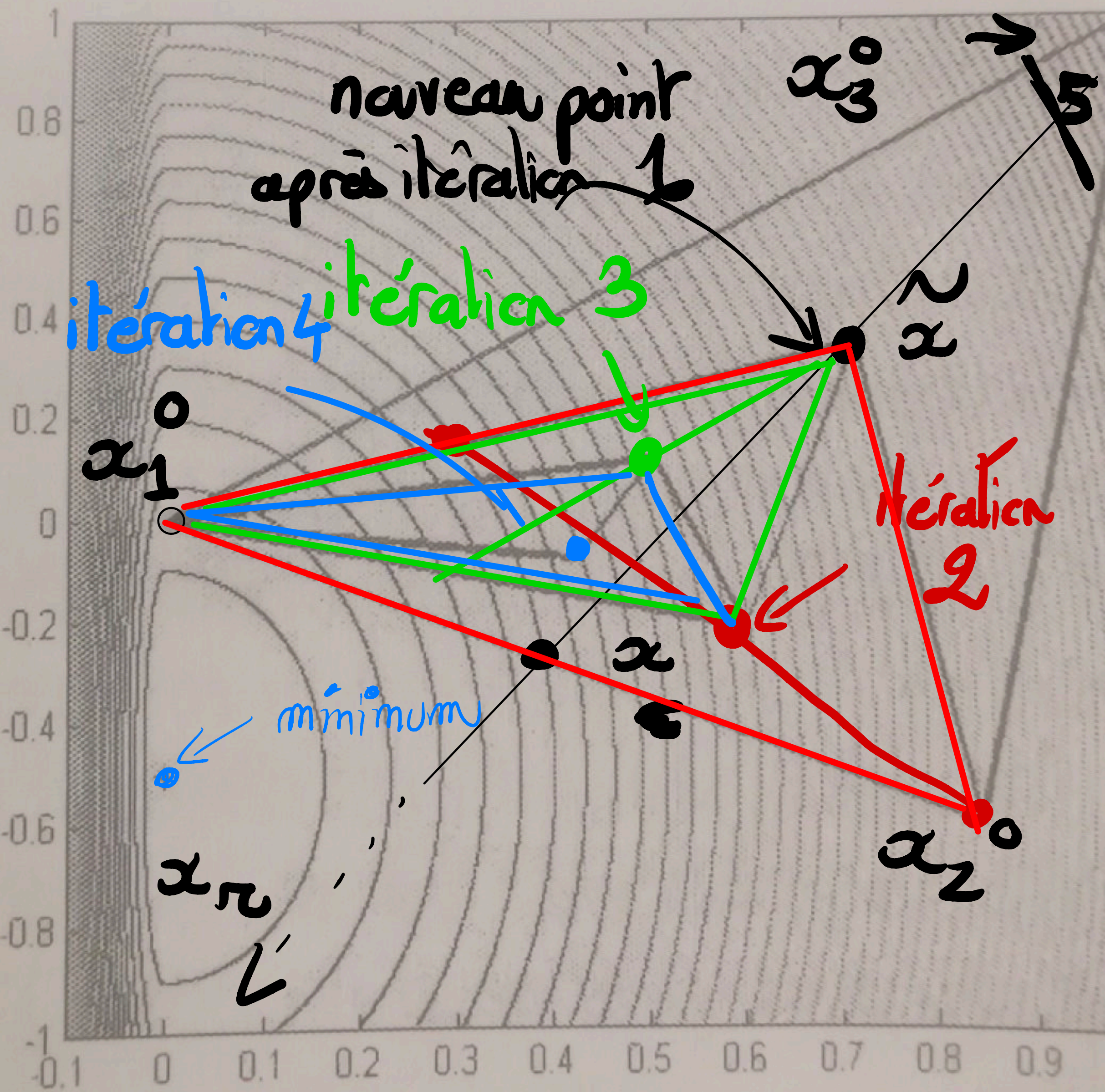
(1,5 pts)

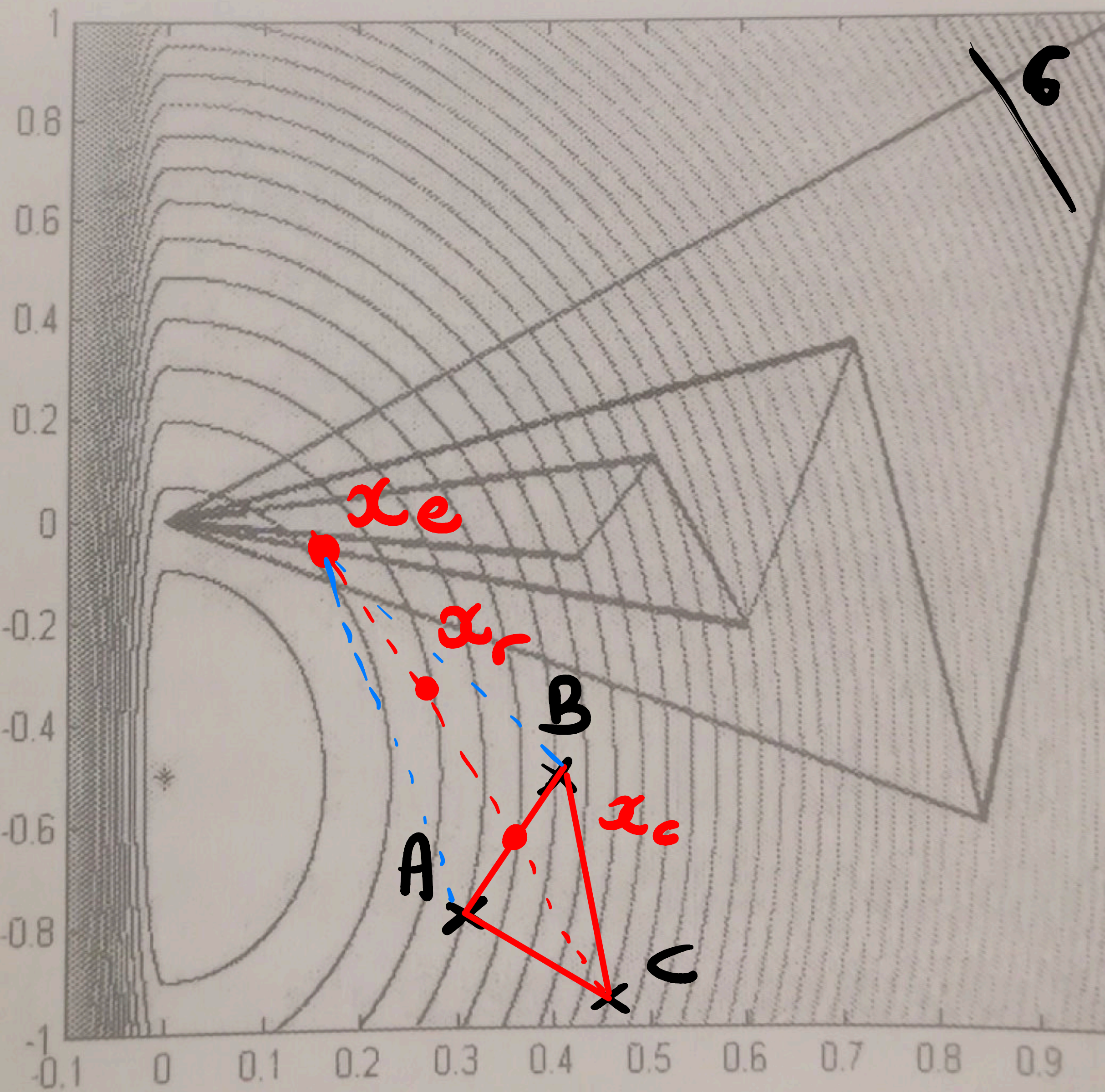
3) Dans ce cas $A \equiv x_1$, $B \equiv x_2$, $C \equiv x_3$ (plus mauvais point). On trace x_c puis x_r. On se trouve dans le "cas 1" de Nelder Mead où $f(x_r) < f(x_1)$.

On teste alors $x_e = x_3 + 3(x_c - x_3)$.

Comme $f(x_e) < f(x_r)$, on remplace x_3 par x_e dans le triangle (2 pts)

4


nouveau point
après itération 1
x_3^0
itération 4
itération 3
$\tilde{x}$
x_1^0
itération 2
x_c
minimum
x_2^0
x_r
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9



6
x_e
x_r
B
x_c
A
C
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9

Ex 4) (4 pts)

7

```
def Pattern_search(f,X0,Niter):
    n=len(X0)
    alpha=1
    rho=0.5
    tau=1.5
    D=np.concatenate([np.eye(n),-np.eye(n)])  # set of directions
    N=2*n
    Xk=X0
    for k in range(Niter):
        i=0
        while(i<=N-1 and f(Xk+alpha*D[i,:])>=f(Xk)):
            i=i+1
        if (i==N):#echec
            alpha=alpha* rho
        else:
            Xk=Xk+ alpha* D[i,:]
            alpha=alpha*tau
    return Xk
```

Ex 5) (6 pts)

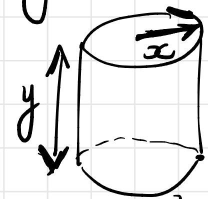
1) Le script présente la minimisation de la fonction

$$f_\rho(x,y) = x^2 + xy + \rho(x^2y - 2V_0)^2$$

avec la méthode du gradient utilisant une recherche linéaire du type Armijo et backtracking.

On peut donc aussi le voir comme la minimisation de la fonction

$$f(x,y) = x^2 + xy$$ (surface de la canette de rayon x et de hauteur y, où $2\pi = 1$)



sous la contrainte $x^2 y = 2V_0$

(volume de la canette $= V_0$ où $2\pi = 1$)

par la méthode de pénalisation (2 pts)

2) On cherche la solution exacte du problème en prenant $y = \frac{2V_0}{x^2} = \frac{2000}{x^2}$

ce qui donne :

$h(x) = f(x,y) = x^2 + \frac{2000}{x}$. On a

$h'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2}$; h' s'annule

en x tel que $x^3 = 1000$, soit
$x = 10$ et $y = \frac{2000}{10^2} = 20$

Il s'agit bien du minimum de f recherché par l'algorithme. La valeur numérique obtenue est donc très satisfaisante. (4pts)