TD 2 Optimisation: introduction et rappels (partie 2)

Exercice 1.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sin(||x||^2) = \sin(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

1. Montrer que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer son gradient.

2. Montrer que la fonction f est C^2 et calculer sa matrice Hessienne.

3. Déterminer tous les extrema (minima et maxima) de f sur $\mathbb{R}^n$. Représenter graphiquement ces extrema dans le cas où $n = 2$.

Exercice 2.

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

1. Montrer que la fonction g est coercive.

2. Montrer que la fonction g est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

3. En déduire que g possède un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$ et le déterminer.

4. Déterminer le minimum de g sur $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x + y = 3\}$.

5. Soit l'ensemble $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } x + y \geq 2\}$. Montrer que X_2 est convexe et compact. Déterminer le minimum et le maximum de g sur X_2.

Exercice 3

Soit la fonction.

$$J(x, y) = x^4 + y^2 + 2xy$$

à minimiser sur l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq 1 \quad \text{et} \quad x + y \leq 1\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble D.
2. Montrer que le point $(0,0)$ n'est pas un minimum local de J sur D.
3. Montrer que J possède un minimum global sur D.
4. Ecrire les relations KKT et en déduire l'ensemble des minima locaux de J sur D.

Exercice 4

On considère la fonction

$$f(x,y) = x + y$$

sur l'ensemble

$$\Omega = \{\ y \leq 0,\ y \geq x^3\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble Ω.
2. Rechercher graphiquement le maximum de f sur Ω.
3. Le point obtenu satisfait-il les relations KKT ? Expliquer.