

TD 4: optimisation locale avec contraintes

L'objectif général de ce TD est d'étudier la convergence de trois algorithmes de recherche de minimum local avec contraintes : le gradient projeté, la méthode de pénalisation et l'algorithme d'Uzawa pour un cas particulier.

Dans tout le TD, on s'intéresse à la minimisation d'une fonction quadratique $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$J(x) = \frac{1}{2} {}^t x A x - {}^t b x$$

avec A une matrice symétrique définie positive de taille n et $b \in \mathbb{R}^n$, sous la contrainte

$$C x = d$$

avec C une matrice de taille $p \times n$ ($p < n$), de rang maximal p et $d \in \mathbb{R}^p$.

On note $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Exercice 1 (étude théorique)

1. Montrer que J admet un unique minimum global x^* sur $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, Cx = d\}$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\begin{cases} Ax^* + {}^t C \lambda^* = b \\ Cx^* = d \end{cases}$$

Exercice 2 (méthode de pénalisation)

On considère la fonction pénalisée :

$$J_\rho(x) = J(x) + \frac{\rho}{2} \|Cx - d\|^2$$

o $\rho > 0$ est un paramètre de pénalisation.

1. Montrer que J_ρ possède un unique minimum x_ρ sur \mathbb{R}^n .
2. Montrer que pour tout $\rho > 0$, on a $J(x_\rho) \leq J(x^*)$.
3. En déduire que la famille $(x_\rho)_{\rho > 0}$ est bornée.
4. Montrer que la seule valeur d'adhérence possible de toute suite $(x_{\rho_n})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\rho_n \rightarrow +\infty$ est égale à x^* .
5. En déduire que toute suite $(x_{\rho_n})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\rho_n \rightarrow +\infty$ tend vers x^* .

Exercice 3 (méthode du gradient projeté)

On note P_Ω la projection de \mathbb{R}^n sur le convexe fermé Ω , c'est à dire que $P_\Omega(x) \in \Omega$ et

$$\|x - P_\Omega(x)\| = \min_{v \in \Omega} \|x - v\|$$

1. Montrer que x^* est tel que

$$\forall v \in \Omega, \quad \langle \nabla J(x^*), v - x^* \rangle \geq 0$$

En déduire que pour tout $\rho > 0$,

$$x^* = P_\Omega(x^* - \rho \nabla J(x^*))$$

2. On considère l'algorithme du gradient projeté à pas constant : partant de $u_0 \in \mathbb{R}^n$, on construit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_{k+1} = P_\Omega(u_k - \rho \nabla J(u_k))$$

Montrer que si $\rho < \frac{2}{\lambda_n}$, alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x^* .

Exercice 4 (méthode d'Uzawa)

On considère l'algorithme suivant : soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ et $\rho > 0$. On construit les suites $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi : $Au_0 = b - {}^t C \lambda_0$ puis

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Cu_k - d) \\ Au_{k+1} = b - {}^t C \lambda_{k+1} \end{cases}$$

1. Montrer que

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|^2 \leq \|\lambda_k - \lambda^*\|^2 + (\rho^2 \|C\|^2 - 2\rho\lambda_1) \|u_k - x^*\|^2$$

2. En déduire qu'il existe $\rho_1 > 0$ tel que si $\rho < \rho_1$, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x^* .