TD 5: optimisation locale avec contraintes (partie 2)

Exercice 1

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe et coercive et soit l'ensemble

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x) \leq 0\}$$

où ϕ est une fonction strictement convexe.

On note

$$\mathrm{Int}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x) < 0\}$$

l'intérieur de C. On suppose dans toute la suite que C est fermé et que $\mathrm{Int}(C) \neq \emptyset$.

1. Montrer que J possède un unique minimum X^* sur C
2. Soit $\epsilon > 0$. On note J_ϵ la fonction définie sur $\mathrm{Int}(C)$ par :

$$J_\epsilon(x) = J(x) - \frac{\epsilon}{\phi(x)}$$

   Montrer que J_ϵ possède un unique minimum X_ϵ sur $\mathrm{Int}(C)$.
3. Montrer (quitte à extraire) que X_ϵ converge vers X^* quand ϵ tend vers 0.
4. Expliquer pourquoi on parle de méthode de pénalisation intérieure.

Exercice 2

On considère une configuation dans le plan de n disques repérés par leurs centres $(q_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n$ et leurs rayons $(r_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On définit le domaine correspondant de non-intersection de ces disques :

$$Q = \{q = (q_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n \quad / \quad q_i - q_j > r_i + r_j, \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

et on définit la fonction suivante sur $(\mathbb{R}^2)^n$:

$$D_{i,j}(q_1, ..., q_n) = q_i - q_j - (r_i + r_j)$$

1. Montrer que D est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^{2n}$. Montrer que $D_{i,j}$ est C^1 sur Q et calculer son gradient, noté $G_{i,j}$.
2. L'ensemble Q est-il convexe ?
3. A présent, on souhaite que les disques se déplacent de la position $(q_i)_{1\leq i\leq n}$ à la position $(q_i + v_i)_{1\leq i\leq n}$ suivant une trajectoire rectiligne uniforme. Cependant, en raison de possibles intersections à l'arrivée du déplacement, on cherche à trouver le déplacement admissible le plus proche du déplacement souhaité $v = (v_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n$.

   On étudie donc le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Trouver } u^* = argmin\,(J(u) = u - v^2) \qquad (Opt)$$

sur l'ensemble

$$C = \{u \in (\mathbb{R}^2)^n \quad / D_{i,j}(q) + < G_{i,j}(q), u > \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

(a) Montrer que C est un ensemble fermé et convexe.

(b) Montrer que si $q \in Q$ et $u \in C$, alors $q + u \in Q$.

(c) Exprimer le problème (Opt) précédent en termes de projection et en déduire qu'il possède une unique solution.

(d) Ecrire le Lagrangien du problème (Opt) puis exprimer sous forme pseudo-informatique l'algorithme d'Uzawa dans ce cas.

(e) Déterminer une valeur $\rho_C > 0$ telle que pour tout $\rho \in]0, \rho_C[$, l'algorithme d'Uzawa converge vers la solution du problème (Opt).

(f) Implémenter sous Python l'algorithme correspondant et le tester pour la configuration consistant en 3 disques de rayon identique égal à $\frac{1}{5}$ avec :

$$q = \{(0,0), (1,0), (\frac{1}{2}, 1)\}, \quad \text{et} \quad u = \{(1,0), (-\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})\}$$