Master M2S, 2ème année
Module M8,'Optimisation sans gradient'
Année 2011-2012, Mr DUMAS

EXAMEN, 8 mars 2012

A. PARTIE THEORIQUE

I. Un problème d'optimisation : la canette de soda .

On cherche à fabriquer une canette de type cylindrique, de volume supérieur à un volume donné $V \geq V_0$ et ayant une surface S minimale (pour des raisons de coût de fabrication). On caractérise chaque canette par son diamètre $d \in [d_m, d_M]$et sa hauteur $h \in [h_m, h_M]$. On prendra $V0 = 300$ (ml) et $d_m = h_m = 1$ (cm) et $d_M = h_M = 20$ (cm).

1. Calculer la solution optimale du problème à savoir la forme de la canette (diamètre d et hauteur h) ayant la plus petite surface pour un volume V_0 donné. On pourra transformer le problème sous contrainte en un problème sans contrainte en éliminant une des inconnues. Représenter graphiquement les résultats dans le plan (d, h).
2. On cherche à présent à trouver les canettes ayant à la fois la surface minimale mais aussi un volume maximal. Il s'agit donc à présent d'un problème multiobjectif. Calculer le font de Pareto relatif à ce problème. On pourra se ramener à l'étude d'un problème d'optimisation mono-objectif en pondérant les deux critères par un coefficient $\lambda \in [0, 1]$. Représenter graphiquement les résultats dans le plan (d, h) et dans le plan (S, V).

II. Un métamodèle et l'effet pépite .

On considère ici un métamodèle en dimension 1 appelé krigeage dual. Il s'agit d'un modèle d'interpolation d'un fonction J connue aux points réels $\{X_i, 1 \leq i \leq N\}$ par une fonction $\tilde{J}$ telle que

$$\tilde{J}(x) = d(x) + w(x)$$

avec

$$d(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j x^{j-1}$$

et

$$w(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi(|x - X_j|)$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $\phi : \mathbb{R}_+ \to R$ est une fonction donnée. On suppose de plus que

$$\forall i \in \{1, ..., k\}, \quad \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (X_j)^{i-1} = 0$$

1. On note C la matrice $N \times N$ de terme général $c_{i,j} = \phi(|X_i - X_j|)$, et P la matrice $N \times k$ de terme général $p_{i,j} = (X_i)^{j-1}$. Ecrire le système dont sont solutions les coefficients $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ et $a = (a_1, ..., a_k)$ pour que $\tilde{J}(X_i) = J(X_i), 1 \leq i \leq N$.
2. Donner des exemples de fonctions ϕ pour lesquelles la matrice C est inversible (on pourra faire le lien avec les méthodes RBF).
3. On remplace C par $C + \beta D$ où β est un coefficient strictement positif et D est une matrice diagonale de coefficients $d_i \geq 0$. On parle d'effet pépite pour le point X_i si $d_i > 0$. Justifier cette dénomination.
4. Montrer que si $k = 2$ et $D = I_N$ (matrice identité de taille N), alors $\tilde{J}(x)$ converge vers la droite des moindres carrés associée aux points X_i et à J lorsque β tend vers $+\infty$.

B. PARTIE PROGRAMMATION

A partir d'un code existant de type algorithme génétique (écrit avec Scilab), l'objectif est d'implémenter une nouvelle méthode de sélection, appelée 'classement stochastique' afin de traiter les contraintes d'une nouvelle manière puis de l'appliquer au problème de la canette de soda.

Une quatrième partie (indépendante des trois premières) s'intéresse au méta-modèle avec effet pépite de la partie théorique.

Les programmes rendus seront nommés `prenom_nom_1.sci`, etc...

I. Etude du script initial .

Le script initial se trouve à l'adresse suivante :

`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/M7exam.sci`.

Il propose la résolution numérique du problème de la canette de soda (voir partie précédente) à l'aide d'un algorithme génétique réel, sans élitisme et avec une méthode de pénalisation fixe.

1. Expliquer la définition de la fonction coût.
2. Décrire et justifier l'opérateur de mutation. En quel sens peut-on parler de mutation adaptative ?
3. Décrire l'opérateur de croisement. Quel opérateur alternatif pourriez vous proposer ?
4. Commenter les deux figures tracées au terme de l'éxécution du script.

II. Le classement stochastique .

La méthode de classement stochastique permet de classer λ individus afin de prendre en compte les contraintes de manière stochastique.

```
I_j = j ∀ j ∈ {1, ..., λ}
for i = 1 to λ do
    for j = 1 to λ − 1 do
        sample u ∈ U(0, 1) (uniform random number generator)
        if (φ(x_{I_j}) = φ(x_{I_{j+1}}) = 0) or (u < P_f) then
          if f(x_{I_j}) > f(x_{I_{j+1}}) then
            swap(I_j, I_{j+1})
          fi
        else
          if φ(x_{I_j}) > φ(x_{I_{j+1}}) then
            swap(I_j, I_{j+1})
          fi
        fi
    od
    if no swap done break fi
od
```

Fig. 2. Stochastic ranking procedure, $P_f = 0.45$.

Dans cet algorithme, f est la fonction coût qui doit être minimisée (par exemple la surface de la canette) et Φ est le terme de pénalisation (par exemple, $\min(V - 300, 0)^2$ pour le probleme de la canette de soda). Dans cet algorithme, le paramètre fixé P_f est responsable de l'effet aléatoire du classement.

1. Décrire le classement stochastique dans les 2 cas extrêmes $P_f = 0$ et $P_f = 1$.

2. Implementer avec Scilab (ou Matlab/Octave) le classement stochastique de λ éléments pour une fonction coût f et une fonction de pénalisation Φ données.

III Application au problème de la canette .

Appliquer la méthode de classement stochastique pour résoudre le problème de la canette exposé dans la partie A.I. Dans le script initial, seuls les fonctions `evaluation` et `selection` devront être modifiées. Comparer les résultats obtenus.

IV Implémentation d'un métamodèle .

Programmer avec Scilab (ou Matlab/Octave) le métamodèle présenté dans la partie théorique A.II. (pour des fonctions à une variable réelle).

Implémenter également l'effet pépite et vérifier numériquement le résultat de la partie A.II.4 (convergence du métamodèle vers la droite des moindres carrés).

On pourra tester le programme avec les fonctions suivantes : $\phi_(x) = x$ ou $\phi(x) = x^3$, des points d'interpolation choisis aléatoirement dans $[0, 1]$ et pour une fonction $J : [0, 1] \to \mathbb{R}$ quelconque.

Les résultats seront vérifiés à l'aide d'une représentation graphique de $\tilde{J}$ et de J sur une même figure.