

Contrôle n°2
Lundi 28 novembre 2016

Pas de calculatrice autorisée. Tous les résultats seront justifiés. La rédaction sera soignée.

Exercice 1. Calculer, en le justifiant, la limite éventuelle des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{(-1)^n n}{1 + n^2}$
2. $u_n = \frac{n^2 - 2}{n^2 + n + 1}$

Exercice 2. Une espèce animale est décimée chaque année de 10% de sa population totale à cause d'une maladie l'affectant.

1. En notant A_n la population de cette espèce et sachant que $A_0 = 1000$, déterminer la population de l'espèce animale à l'année n . Calculer la limite de A_n lorsque n tend vers l'infini. Que se passera-t-il pour l'espèce animale ?
2. Un programme de soin de cette espèce est lancé à partir de l'année 0. Sur les 10% de la population condamnée par la maladie, il permet de sauver 10 animaux par an. On note à présent B_n la population de cette espèce avec ce nouveau programme de sauvegarde. Déterminer une relation reliant B_{n+1} et B_n .
3. Calculer la limite l de la suite (B_n) . L'espèce animale sera-t-elle sauvée par ce programme ?

Exercice 3. On considère les suites (t_n) et (q_n) telles que

$$\begin{cases} t_{n+1} = 0.2q_n \\ q_{n+1} = 10t_{n+1} \end{cases}$$

avec $t_0 = 2$ et $q_0 = 1$. Déterminer une expression de t_n et q_n en fonction de n puis calculer

$$T_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$$

Exercice 4. On définit une suite par itération :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

On désire étudier la convergence de cette suite et calculer sa limite, si elle existe.

1. Représenter sur un même dessin, la courbe représentative de $f(x) = \sqrt{2+x}$ ainsi que l'évolution de la suite (u_n) . Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer que la suite (u_n) est comprise entre 0 et 2.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.