

Contrôle n°3
jeudi 12 janvier 2017

Calculatrice interdite. Tous les résultats seront justifiés. La rédaction sera soignée.

Exercice 1.

a) Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- a) Déterminer une matrice P et une matrice D telles que $A = PDP^{-1}$.
b) Calculer le terme général de la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = -1$.

Exercice 3.

On cherche à étudier l'évolution à long terme de la population de 3 pays, notés A, B et C, dont on connaît les flux migratoires. On a pu observer sur une année les mouvements suivants entre ces 3 pays :

- (i) 30% de A émigrent dans B et 20% de A émigrent dans C.
(ii) 10% de B émigrent dans A et 30% de B émigrent dans C.
(iii) 10% de C émigrent dans A et 10% de C émigrent dans B.

Au 1er janvier 2017, les pays A, B et C comprennent respectivement 20, 10 et 70 millions d'habitants.

- a) En notant u_n , v_n et w_n la population respective des pays A, B, C au 1er janvier 2017 + n , déterminer une relation du type

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

où A est une matrice de taille 3 qu'on déterminera.

- b) Montrer que 1, 0.5 et 0.4 sont des valeurs propres de A puis diagonaliser A .
c) En déduire une expression de A^n où n est un entier quelconque puis donner une expression de u_n , v_n et w_n en fonction de n .
d) Vers quelles valeurs vont tendre les populations des pays A, B, et C ?