Université de Versailles Saint Quentin
UE MA100BIO
Année 2016–2017

Feuille de TD 3 : Suites numériques

I. Limites

Exercice 1 -
Les suites suivantes ont-elles une limite ? Si oui, calculez-la.

(a) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ (b) $u_n = 2^n - n$ (c) $u_n = (-3)^n$

(d) $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ (e) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{2n^2+3}$ (f) $u_n = n^n$

(g) $u_n = 1 - \dfrac{\sin n}{n}$ (h) $u_n = n + \cos(n)$ (i) $u_n = (-1)^n n$

II. Aspects numériques

Exercice 2 -
Prenez votre calculette, une valeur $a > 0$ de votre choix, et appuyez sur la touche $\sqrt{\ }$ un certain nombre de fois. Observez les résultats que vous trouvez. Que se passe-t-il ?

Exercice 3 -
Soit la suite $u_n = \sqrt{n^2+6n} - n$ pour $n > 0$. Calculer avec une calculette les valeurs de u_n pour $n = 10^3, 10^6, \dots 10^{15}$. Conjecturer le comportement de la suite. Montrer que

$$u_n = \frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}.$$

En déduire la limite de u_n. Qu'en pensez-vous ?

III. Suites particulières

Exercice 4 -
On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$ où $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 5 -
On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$ où $u_0 = 2$ et $u_5 = -64$. Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 6 -

$(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5\,u_n + 8$ pour n entier naturel. Déterminer u_n en fonction de n puis étudier sa convergence.

Exercice 7 -

Calculer la somme des n premiers nombres pairs et la somme des n premiers nombres impairs.

Exercice 8 -

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = 0^3 + 1^3 + \cdots + n^3$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

IV. Suites définies par itération

Exercice 9 -

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^3$. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 10 -

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Est-ce que cette suite admet une limite ?

Exercice 11 -

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Calculer avec une calculatrice les 10 premiers termes de cette suite. Conjecturer le comportement asymptotique de la suite.
2. Démontrer le résultat.

V. Modélisation

Exercice 12 -

On considère deux populations A et B dont l'effectif total est supposé être constant et égal à 100 000 habitants.
Chaque année, 15% de la population A rejoignent la population B et 10% de la population B rejoignent la population A.
Etudier l'évolution de ces deux populations.
Généraliser avec un taux de passage de A à B égal à r, un taux de passage de B à A égal à t et une population totale égale à S.

Exercice 13 -

Toutes les heures, on injecte à un sujet, par piqûre intraveineuse, une même dose de 1,8 unités, d'une substance médicamenteuse dans le sang.
On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang ; elle est ensuite progressivement éliminée.
En l'espace d'une heure, la quantité de cette substance présente dans le sang diminue de 30 %.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Q_n la quantité de substance présente dans le sang juste après l'injection à la $n^{ième}$ heure. La première injection se fait à $n = 0$.
1.a. Déterminer Q_0, Q_1 et Q_2.
1.b. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer Q_{n+1} en fonction de Q_n .
2. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $Q_n = 6(1 - 0,7^{n+1})$.
3. Montrer que la suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ converge. À quoi correspond sa limite ?
4. Combien faut-il d'injections pour que 90% de la substance totale soient présentes dans le sang.

Exercice 14 - *Le modèle proie-prédateur.*

Ce modèle a été proposé par le biophysicien Lokta en 1925 et par le mathématicien Voltera en 1926 à partir des satistiques d'évolution des lynx et des lièvres dans la baie d'Hudson au XIX^{ème} siècle.
Le modèle a été construit en supposant que seule l'interaction entre le prédateur (le lynx) et la proie (le lièvre) avait une influence sur ces deux populations.
Ils ont considéré que le taux de mortalité m_1 du lynx était fixe et que son taux de natalité était proportionnel à la population de lièvre (taux de proportionnalité : k_1). De même, le taux de natalité n_2 du lièvre est fixe et son taux de mortalité est proportionnel à la population de lynx (taux de proportionnalité : k_2).
Les valeurs des coefficients m_1, k_1, n_2 et k_2 ont été déterminés expérimentalement :

$$m_1 = 3\%, k_1 = 0,0002, n_2 = 5\%, k_2 = 0,001.$$

1. En notant L_n le nombre de lynx l'année n et l_n le nombre de lièvres, exprimer L_{n+1} et l_{n+1} en fonction de L_n et l_n.
2. Etudier l'évolution de la population de lynx en l'absence de proie. Au bout de combien de temps aura-t-elle été divisée par 2.
3. Etudier l'évolution de la population de lièvres en l'absence de prédateurs. Au bout de combien de temps aura-t-elle doublé ?
4. Vérifier que pour certaines valeurs initiales du nombre de lièvres et de lynx les deux populations restent stables.
5. Dans les autres cas, faire une étude numérique et graphique avec la calculatrice en prenant comme population initiale 50 lynx et 200 lièvres

Exercice 15 - *Une épidémie.*

Une épidémie d'une maladie non mortelle atteint une population d'effectif total $E = 1000000$.
On veut étudier l'évolution de cette épidémie jour après jour en supposant qu'au départ 1000 personnes sont atteintes.
Le jour n, T_n personnes tombent malades, G_n personnes guérissent et il y a A_n personnes atteintes au total.

1. Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n, T_{n+1} et G_{n+1}.
2.a. Exprimer que le nombre de personnes guérissant le jour $n+1$ est proportionnel au nombre de personnes atteintes le jour n (noter k le coefficient de proportionnalité).
b. On suppose de plus que $T_{n+1} = k' A_n(E - A_n)$. Montrer que $A_{n+1} \leq rA_n$ avec $r = 1 + k'E - k$.
3. Expérimentalement, on obtient $k = 15\%$ et $k' = 10^{-7}$.
a. Déduire de la question précédente que $A_n \leq E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N},\ A_n \geq 0$.
c. Montrer que l'épidémie sera enrayée. Au bout de combien de temps sera-t-on sûr qu'il n'y a plus de malades ?
4. Généraliser au cas où $0 < r < 1$.
5. Que peut-on dire si $r = 1$?

Exercice 16 - *Croissance logistique.*

On veut modéliser la croissance d'une population dans un environnement limité avec un modèle à temps discret. On note P_n le nombre d'individus au temps $n \in \mathbb{N}$ et on écrit l'accroissement de la population entre les instants n et $n+1$ sous la forme

$$P_{n+1} - P_n = r_n P_n$$

où r_n est le taux de croissance relatif. On suppose que le taux de croissance relatif est donné par

$$r_n = 1 - \frac{P_n}{K}$$

où $K > 0$ est un paramètre. On prend $0 < P_0 < K$.

Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.

VI. Vertiges de l'infini

Exercice 17 - *Paradoxe d'Achille et de la tortue (Difficile)*

a. Que penser du raisonnement ci-dessous ?
"Achille est célèbre pour sa rapidité de course ; il peut courir à la vitesse de 5 m/s des centaines de mètres. La tortue pour sa part avance à la vitesse de 5cm/s. Au départ, Achille est au point A, la tortue au point B qui se situe à 100m de A. Achille et la tortue se déplacent sur la droite AB et Achille essaie de rattraper la tortue. Quand Achille atteint le point B, la tortue a avancé et se trouve en B_1. Quand Achille atteint B_1, la tortue est en B_2. Quand Achille atteint B_2, bien sûr la tortue n'y est plus, puisqu'elle est en B_3. En poursuivant ce raisonnement, on comprend bien qu'Achille ne rattrape pas la tortue."
b. En oubliant le raisonnement précédent, calculer au bout de combien de temps et à quelle distance de A Achille rattrape la tortue.
c. Dans cette question, on réconcilie les deux points de vue. D'abord, on calculera au bout de combien de temps Achille atteint le point B et la position B_1 de la tortue à ce moment-là. Puis on calcule au bout de combien de temps Achille arrive en B_1 et la position B_2 de la tortue; et ainsi de suite.