MA350, EXAMEN FINAL, SESSION 2

Les programmes Scilab et/ou Maxima seront implémentés sur votre ordinateur puis envoyés à l'adresse `laurent.dumas@uvsq.fr` *à la fin de l'examen.*

L'ensemble des programmes Scilab (respectivement Maxima) sera envoyé sous la forme d'un fichier par exercice dénommé MA350-n-exo-i.sci (respectivement MA350-n-exo-i.wxm) où n représente votre numéro d'anonymat et i le numéro d'exercice.

Une copie manuscrite sera également rendue en complément pour expliquer la démarche et éventuellement résoudre les exercices.

Les doubles licences rendent l'exercice 1 et l'exercice 2 (en intégralité).

Les licences maths rendent l'exercice 1 et l'exercice 2 (hors questions DL) et les exercices 3 et 4.

Exercice 1 Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.
2. On utilise la méthode d'Euler explicite avec pas constant h, démarrant au temps $t_0 = 0$.
   Proposer un script Scilab permettant de comparer sur l'intervalle $[0, 10]$ la solution exacte et la solution approchée précédente dans le cas où $x_0 = y_0 = 1$.
3. (**double licence uniquement**) Représenter graphiquement la vitesse de convergence au point $t = 10.$ de la méthode d'Euler en fonction du nombre de points de discrétisation utilisés.

Exercice 2 1. Montrer que l'équation $x \ln(x) = 10$ admet une unique solution $\bar{x} > 0$. Montrer que $\bar{x} \in [5, 6]$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0 = 6$ et

$$x_{n+1} = \frac{10}{\ln(x_n)}$$

est correctement définie et vérifie

$$|x_n - \bar{x}| \leq (\frac{2}{\ln(25)})^n$$

En déduire que cette suite converge vers $\bar{x}$.

3. En utilisant la question précédente, écrire un script Scilab permettant d'approcher $\bar{x}$ avec une précision ϵ donnée. Que donne cet algorithme en prenant $\epsilon = 10^{-2}$?
4. (**double licence uniquement**) Proposer (en le justifiant) un algorithme de votre choix plus performant que le précédent pour approcher $\bar{x}$ et implémenter celui-ci. Comparer les vitesses de convergence de ces deux algorithmes.

Exercice 3 (*toutes les questions de cet exercice sont indépendantes et seront résolues avec Maxima*)

1. Résoudre l'EDO (1) de l'exercice 1 de manière exacte avec Maxima pour des données initiales x_0 et y_0 quelconques.
2. Trouver avec Maxima la limite en 0 puis un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 10 de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + \tan(x))$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

   Montrer que A est diagonalisable. Est-elle inversible ?
   Déterminer avec Maxima les valeurs propres de A.

Exercice 4

Déterminer avec Maxima l'ensemble des entiers naturels plus petits que 1000 qui sont le produit de deux nombres premiers.