Université de Versailles
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA350.html Année 2015-2016
semestre 1

MA350, EXAMEN FINAL

Les programmes Scilab et/ou Maxima seront implémentés sur votre ordinateur puis envoyés à l'adresse `laurent.dumas@uvsq.fr` *à la fin de l'examen.*

L'ensemble des programmes Scilab (respectivement Maxima) sera envoyé sous la forme d'un fichier par exercice dénommé MA350-n-exo-i.sci (respectivement MA350-n-exo-i.wxm) où n représente votre numéro d'anonymat et i le numéro d'exercice.

Une copie manuscrite sera également rendue en complément pour expliquer la démarche et éventuellement résoudre les exercices.

Les doubles licences rendent l'exercice 24 et l'exercice 25 (en intégralité).

Les licences maths rendent l'exercice 24 et l'exercice 25 (hors questions DL) et les exercices 26 et 27.

Exercice 1 On considère la méthode de quadrature suivante :

$$\int_a^b f(t)dt \simeq S_n$$

avec

$$S_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{6}(f(x_i)+4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})+f(x_{i+1}))$$

où $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$.

1. Implémenter la méthode de quadrature précédente avec Scilab. Les paramètres du programme seront f, a, b et n.
2. Démontrer que
$$4\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = \pi$$
Quelle approximation de π donne l'algorithme précédent avec $n = 10$?
3. (**doubles licences seulement**) On montre que si f est 4 fois dérivable sur $[a, b]$, alors
$$|\int_a^b f(t)dt - S_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$$
Proposer un script Scilab donnant une approximation de π à une précision ϵ quelconque. L'unique paramètre du programme sera le réel $\epsilon > 0$. On admettra que la valeur absolue de la dérivée quatrième de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$ est majorée par 16.

Exercice 2 On s'intéresse au modèle de pendule suivant :

$$x''(t) + kx'(t) + \omega_0^2 x(t) = A\cos(\omega t) \tag{1}$$

avec la condition $x(0) = \boldsymbol{x}_0$ et $x'(0) = 0$.

1. Donner une interprétation physique des paramètres k, ω_0, A et ω.
2. On suppose que $k = 1$, $\omega = \omega_0 = 2$, $A = 1$ et $x_0 = 0.5$. A l'aide de l'instruction `ode` de Scilab, représenter la solution $t \mapsto x(t)$ et la courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), x'(t))$ pour $t \in [0, 50]$. Interpréter les résultats.
3. (**doubles licences seulement**) Reprendre la question précédente en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $\Delta t = 0.1$ (respectivement 0.001). Que peut-on dire ?
4. (**doubles licences seulement**) On suppose à présent seulement que $k = 0$, $\omega_0 = 2$, $A = 1$ et $x_0 = 0.5$. Mettre en évidence graphiquement avec Scilab le phénomène de résonance lorsque ω se rapproche de ω_0. Comment justifier ce phénomène ?

Exercice 3 (*toutes les questions de cet exercice sont indépendantes et seront résolues avec Maxima*)

1. Vérifier avec Maxima que la méthode de quadrature vue à l'exercice 1 avec $n = 1$ donne une valeur exacte de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ pour toute fonction polynomiale du type

$$f(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$$

2. Calculer avec Maxima la dérivée quatrième de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et vérifier qu'elle est majorée par 16 en valeur absolue sur $[0, 1]$.
3. Résoudre l'EDO (1) de manière exacte avec Maxima pour des paramètres k, ω_0, A et ω quelconques et une condition initiale identique à celle de l'exercice 2.

Exercice 4 Déterminer avec Maxima combien de nombres à exactement 4 chiffres, multiples de 7, n'ont que des chiffres impairs et distincts.