Contrôle d'Analyse Numérique du mardi 02 mai 2017 - 1h30

Aucun document, ni portable et autre instrument électronique ne sont autorisés

Exercice 1. On se propose d'établir quelques propriétés des fonctions H_n, pour $n \geq 0$ entier, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &H_0(x) := 1, \\ &H_n(x) := (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{\frac{-x^2}{2}}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star. \end{aligned}$$

1)- Montrer que pour tout $n \geq 1$, les fonctions H_n vérifient :

$$H_n(x) = xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x).$$

2)- Calculer H_1, H_2, H_3.
3)- Par récurrence sur $n \geq 0$, en déduire que H_n est un polynôme de degré n et que son coefficient en x^n est égale à 1.
4)- Soit p un polynôme d'une variable réelle, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$ est convergente.

5)- Soient p et q deux polynômes d'une variable réelle, montrer, en procédant à une intégration sur un intervalle borné $[-M, M]$, puis en faisant tendre M vers $+\infty$ que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (p(x)e^{\frac{-x^2}{2}})'q(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)q'(x)e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$$

6)- Montrer que pour tout $k < n$ on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k H_n(x)e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = 0$. En déduire que les polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment la suite des polynômes orthogonaux sur $\mathbb{R}$ pour la fonction poids ω que l'on précisera.

Exercice 2. Soit $a \in]0, 1[$. Une fonction f étant continue sur $[-1, 1]$, on approche $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ par la formule d'intégration numérique $I_a(f)$ suivante :

$$I_a(f) \;=\; \alpha f(-1) + \beta f(-a) + \gamma f(a) + \delta f(1). \tag{1}$$

i) Montrer que si la formule I_a est au moins d'ordre 3, alors $\alpha = \delta$ et $\beta = \gamma$.

ii) Le réel a étant fixé, déterminer les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que I_a soit au moins d'ordre 3.

iii) Montrer que la formule I_a est au moins d'ordre 4 si et seulement si $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

iv) On pose $a_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Déterminer l'ordre maximal de I_{a_0}.

Dans la suite de l'exercice, on fixe $a = a_0$.

v) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}^6$ définie par

$$\varphi(P) = (P(-1), P(-a), P'(-a), P(a), P'(a), P(1))$$

est un isomorphisme. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, il existe un unique polynôme noté $P_f \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $P_f(-1) = f(-1)$, $P_f(-a) = f(-a)$, $P_f'(-a) = f'(-a)$, $P_f(a) = f(a)$, $P_f'(a) = f'(a)$, $P_f(1) = f(1)$.

vi) On pose $E(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - I_a(f)$. Montrer que $E(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f(x) - P_f(x))\,dx$.

vii) On suppose que $f \in \mathcal{C}^6[-1,1]$, montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\xi_x \in [-1,1]$ tel que

$$f(x) - P_f(x) \;=\; \frac{\pi_6(x)}{6!} f^{(6)}(\xi_x),$$

où $\pi_6(x) \;=\; (x-1)(x-a_0)^2(x+a_0)^2(x+1)$.

<u>Indication</u> : considérer la fonction φ définie par $\varphi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{\pi_6(x)}\pi_6(t)$ pour $x \in]-1,1[, x \neq \pm a_0$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que $\varphi^{(6)}(\xi) = 0$.

viii) On admet que $x \to f^{(6)}(\xi_x)$ est continue sur $[-1,1]$. En utilisant un théorème de la moyenne (à préciser), montrer qu'il existe $C > 0$ (à déterminer) tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^6([-1,1]) \quad \exists \alpha \in [-1,1] \quad \text{tq.} \quad E(f) \;=\; C f^{(6)}(\alpha). \tag{2}$$