

TD n°1 : Norme Matricielle et Conditionnement d'une Matrice

Exercice 1. Normes subordonnées aux normes l_p Soit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ Montrer que

$$|||A|||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |A_{ij}| \right), \quad \text{et} \quad |||A|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |A_{ij}| \right).$$

Exercice 2. On définit l'application de $\mathbb{K}^{n,n}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n,n} \quad |||A||| = \sum_{i,j} |A_{i,j}|.$$

- i) Montrer que $||| \cdot |||$ est une norme sur $\mathbb{K}^{n,n}$.
- ii) Montrer que si N est une norme subordonnée à une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$ alors $N(I_n) = 1$
- iii) Qu'en déduire pour $||| \cdot |||$?
- iv) La norme $||| \cdot |||$ est-elle une norme matricielle ?

Exercice 3. Norme matricielle et rayon spectral

- i) Montrer que toute norme matricielle est compatible à une norme vectorielle.

Indication : On pose pour tout $x \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\|x\| := ||| \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} |||$.

- ii) Soit $N(A) = \max_{i,j} |A_{ij}|$. Est-ce une norme sur $\mathbb{K}^{n,n}$? Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ telle que $\rho(A) > N(A)$ (on rappelle que $\rho(A)$ est égal au maximum des modules des valeurs propres complexes de A). Conclure.

Exercice 4. Norme de Frobenius ou norme de Schur

- (A) (a) Soient E un espace vectoriel réel, préhilbertien (on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé), et F un espace vectoriel de **dimension finie**, montrer alors que

$$F \oplus F^\perp = E.$$

Cette propriété est en général fausse si F n'est pas de dimension finie.

Indication : Pour $x \in E$, on considèrera le vecteur $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F .

- (b) Dans l'espace $\mathbb{R}^{n,n}$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ l'espace des matrices antisymétriques de $\mathbb{R}^{n,n}$. Montrer

$$\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathbb{R}^{n,n}.$$

- (c) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie de $\mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^{n,n}$ telle que

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}((A^T)B),$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{n,n}$ et que pour ce produit scalaire

$$\mathcal{S}_n = (\mathcal{A}_n)^\perp.$$

(B) On définit

$$|||A|||_s = \sqrt{\text{tr}(A^* \cdot A)}.$$

- (a) Montrer que

$$|||A|||_s = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}.$$

- (b) Montrer que $||| \cdot |||_s$ est une norme sur $\mathbb{K}^{n,n}$ (on l'appelle norme de Schur).
(c) Montrer que $||| \cdot |||_s$ n'est pas une norme subordonnée à une norme vectorielle.
(d) Montrer que $||| \cdot |||_s$ est une norme matricielle.
(e) Montrer que $||| \cdot |||_s$ est compatible avec la norme vectorielle $\| \cdot \|_2$.
(f) Montrer que $\rho(A) \leq \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}$.
(g) Montrer que $\forall A \in \mathbb{K}^{n,n}, \quad |||A|||_2 \leq |||A|||_s \leq \sqrt{n} |||A|||_2$.

Exercice 5. Conditionnement d'une matrice Soient A et δA deux matrices appartenant à $\mathbb{C}^{n,n}$ telles que A et $A + \delta A$ soient inversibles. Le vecteur $b \in \mathbb{C}^n$ tel que $b \neq 0$ étant donné, on note x et $x + \delta x$ les solutions des systèmes linéaires :

$$Ax = b, \quad (A + \delta A)(x + \delta x) = b. \quad (1)$$

Montrer que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq k(A) \frac{|||\delta A|||}{|||A|||}, \quad (2)$$

et que cette inégalité est la meilleure possible : en effet, montrer que A étant fixée, on peut choisir b et δA tels que l'on ait égalité dans (2).

Exercice 6. Conditionnement du Laplacien discrétisé par différences finies

On souhaite discrétiser le problème (L) $\begin{cases} -y'' = f \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$ où f est donnée sur $[a, b] =$

$[x_0, x_{n+1}]$ en posant $x_i = x_{i-1} + h$ ($1 \leq i \leq n+1$). On pose de plus $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. On approche la dérivée $y'(x_{i+1/2})$ par

$$y'(x_{i+1/2}) \simeq \frac{(y(x_{i+1}) - y(x_i))}{h},$$

et la dérivée seconde $y''(x_i)$ par

$$y''(x_i) \simeq \frac{(y'(x_{i+1/2}) - y'(x_{i-1/2}))}{h}.$$

On obtient alors une discrétisation du problème $-y'' = f$ par le schéma suivant :

$\forall i \in [1, n] \quad \frac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$, (3) où y_i représente une approximation de $y(x_i)$, $\forall i \in [1, n]$, $y_0 = y(x_0) = 0$, $y_{n+1} = y(x_{n+1}) = 0$. Le problème discrétisé (3) s'écrit matriciellement sous la forme : $AY = h^2 F$ où $Y = [y_1, \dots, y_n]^T$, $F = [f(x_1), \dots, f(x_n)]$ et où la matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que si y est solution du problème (L) alors $\int_a^b -y'' y dx = + \int_a^b y' y' dx + \underbrace{[-y' y]_a^b}_{=0} = + \int_a^b y' y' dx > 0$. On va démontrer l'analogue discret.

i) Montrer que A est symétrique définie positive : on montrera que

$$(Ay, y) = \sum_{i=0}^n (y_{i+1} - y_i)^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \text{ en posant } y_0 = y_{n+1} = 0$$

ii) Diagonaliser la matrice A dans le cas $n = 3$ (on peut remarquer l'existence d'une valeur propre évidente).

iii) On revient au cas général et on considère les vecteurs $v_k, k = 1, \dots, n$ suivants :

$$v_k = [\sin(\frac{k\pi}{n+1}), \sin(\frac{2k\pi}{n+1}), \dots, \sin(\frac{nk\pi}{n+1})]^T, \quad k = 1, \dots, n.$$

Calculer Av_k , pour $k = 1, \dots, n$ et en déduire la diagonalisation de A .

iv) calculer un équivalent, lorsque n tend vers l'infini du conditionnement de A , matrice carrée d'ordre n , représentant le Laplacien discret.